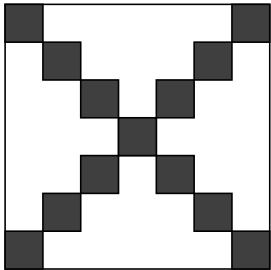


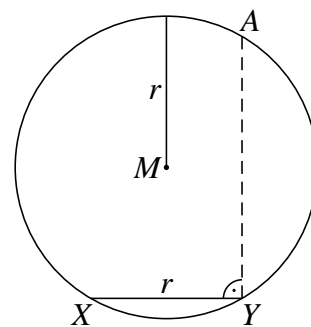
## Zadání soutěžních úloh kategorie Student

### Úlohy za 3 body

1. Jehlan má 17 stěn. Kolik má hran?
- (A) 16            (B) 17            (C) 18            (D) 32            (E) 34
2. Najděte nejmenší reálné číslo  $x$ , které splňuje nerovnost  $x^2 - 2004 \leq 0$ .
- (A) 2004            (B)  $-2004$             (C) 0            (D)  $\sqrt{2004}$             (E)  $-\sqrt{2004}$
3. Každý Martan má na hlavě jedno, dvě, nebo tři tykadla. Právě 1 % martanské populace je složeno z jedinců se třemi tykadly, právě 97 % jedinců má na hlavě dvě tykadla a zbývající 2 % populace jsou složeni z jedinců s jedním tykadlem. Kolik procent Martanů má na hlavě víc tykadel než je průměrný počet tykadel na hlavě v celé populaci?
- (A) 1 %            (B) 3 %            (C) 97 %            (D) 98 %            (E) 99 %
4. Necht'  $s$  je liché přirozené číslo. Ve čtverci se stranou délky  $s$  jsou čtverečky se stranou délky 1 „ležící na úhlopříčkách čtverce“ vybarveny (viz obrázek). Určete obsah nevybarvené části čtverce.
- (A)  $s^2 - 2s + 1$             (B)  $s^2 - 4s + 4$             (C)  $s^2 - 4s + 1$   
(D)  $s^2 - 2s - 1$             (E)  $s^2 - 2s$
- 
5. Kolik existuje dvojmístných čísel, jejichž druhá i třetí mocnina končí stejnou číslicí?
- (A) 1            (B) 9            (C) 10            (D) 21            (E) víc než 30
6. Kolik existuje pravoúhlých trojúhelníků, jejichž vrcholy jsou totožné s některými třemi vrcholy pravidelného čtrnáctiúhelníku?
- (A) 72            (B) 82            (C) 84            (D) 88            (E) jiná odpověď
7. Na poli je 15 ovcí a několik pastýřů. Po odchodu poloviny pastýřů a třetiny ovcí měli zbývající pastýři a ovce dohromady 50 nohou. Kolik nohou měli celkem pastýři a ovce na počátku? (Předpokládejte, že každá ovce má čtyři nohy a pastýř dvě nohy.)
- (A) 60            (B) 72            (C) 80            (D) 90            (E) 100

8. Na kružnici se středem  $M$  a poloměrem  $r$  leží body  $X, Y, A$  tak, že  $|XY| = r$  a úhel  $XYA$  je pravý. Určete velikost úhlu  $XAY$ .

- (A)  $15^\circ$       (B)  $22,5^\circ$       (C)  $30^\circ$       (D)  $36^\circ$       (E)  $45^\circ$



**Úlohy za 4 body**

9. Kolik čtverců v kartézské souřadnicové soustavě má vrchol  $A[-1, -1]$  a je osově souměrných podle alespoň jedné souřadnicové osy?

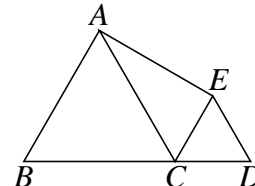
- (A) 2                      (B) 3                      (C) 4                      (D) 5                      (E) 6

10. V neprůhledné obálce je 100 karet označených čísly od 1 do 100. Na každé kartě je jiné číslo. Určete, jaký nejmenší počet karet musíme z obálky vytáhnout, aby součin čísel na vytažených kartách byl vždy dělitelný čtyřmi.

- (A) 51                      (B) 52                      (C) 53                      (D) 54                      (E) 55

11. Dva rovnostranné trojúhelníky  $ABC$  a  $ECD$  na obrázku mají po řadě strany délek 2 a 1. Určete obsah čtyřúhelníku  $ABCE$ .

- (A)  $\frac{5\sqrt{3}}{3}$       (B)  $\frac{4+5\sqrt{3}}{4}$       (C) 3      (D)  $\frac{6+\sqrt{3}}{4}$       (E)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

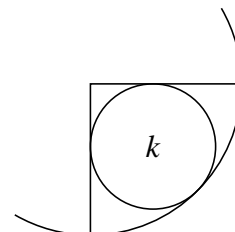


12. Číslo  $(\sqrt{22 + 12\sqrt{2}} - \sqrt{22 - 12\sqrt{2}})^2$  je

- (A) záporné                      (B) rovné nule  
(C) čtvrtou mocninou přirozeného čísla      (D) rovné  $11\sqrt{2}$   
(E) přirozený násobek čísla 5

13. Kružnice  $k$  je vepsána čtvrtkruhu o poloměru 6 (viz obrázek). Určete poloměr kružnice  $k$ .

- (A)  $\frac{6-\sqrt{2}}{2}$                       (B)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$                       (C) 2,5  
(D) 3                      (E)  $6(\sqrt{2} - 1)$

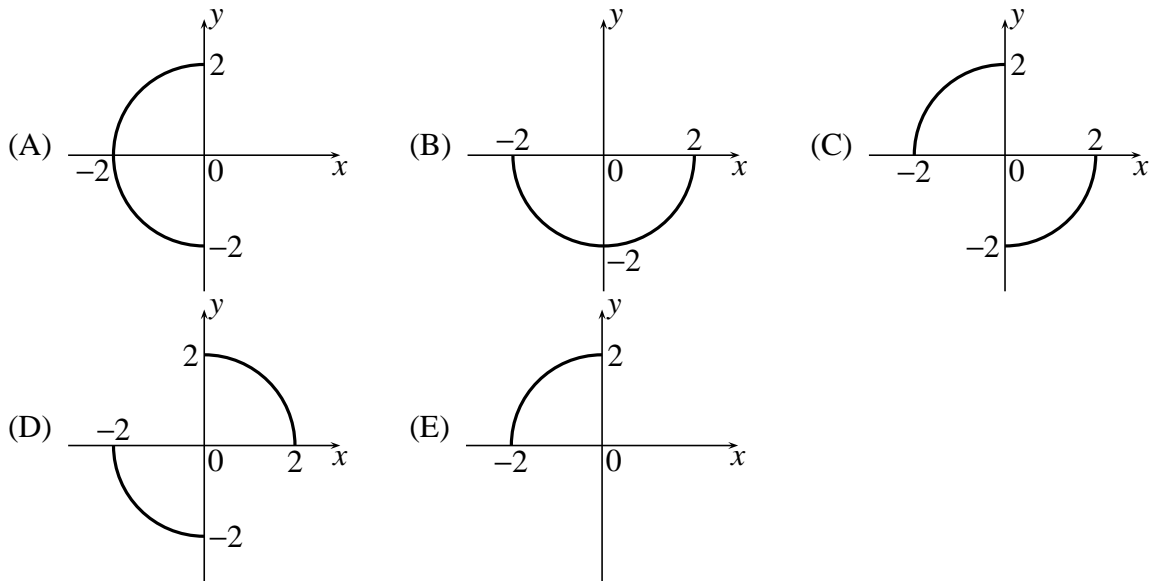


14. Kolik přirozených čísel můžeme zapsat ve tvaru  $a_0 + a_13 + a_23^2 + a_33^3 + a_43^4$ , kde  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  jsou prvky množiny  $\{-1, 0, 1\}$ ?

- (A) 5                      (B) 80                      (C) 81                      (D) 121                      (E) 243

15. Který z následujících grafů znázorňuje množinu všech dvojic  $(x, y)$  reálných čísel vyhovujících současně podmínkám

$$xy \leq 0 \quad \text{a} \quad |x|^2 + |y|^2 = 4?$$



16. Určete číslici na místě desítek v desítkovém zápise čísla  $11^{2004}$ .

- (A) 0                      (B) 1                      (C) 2                      (D) 3                      (E) 4

**Úlohy za 5 bodů**

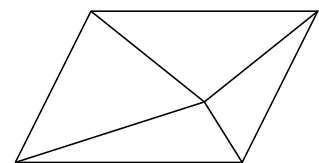
17. Je dán rovnostranný trojúhelník  $ABC$  se stranou délky 4. Určete poloměr oblouku kružnice se středem v bodě  $A$ , který dělí trojúhelník na dvě části se stejným obsahem.

- (A)  $\sqrt{\frac{12\sqrt{3}}{\pi}}$       (B)  $\sqrt{\frac{24\sqrt{3}}{\pi}}$       (C)  $\sqrt{\frac{30\sqrt{3}}{\pi}}$       (D)  $\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$       (E)  $\sqrt{\frac{48\sqrt{3}}{\pi}}$

18. Podle volebního průzkumu v Zelené každý, kdo volil Stranu brokolice, jí pouze brokolici. Navíc 90 % voličů zbývajících stran nikdy brokolici nejedlo. Kolik procent hlasů získala Strana brokolice, jestliže právě 46 % voličů někdy jedlo brokolici?

- (A) 40 %                      (B) 41 %                      (C) 43 %                      (D) 45 %                      (E) 46 %

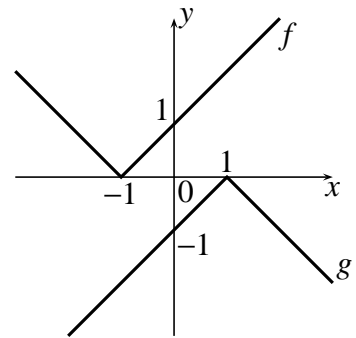
19. Rovnoběžník je rozdělen na čtyři trojúhelníky, které mají společný vrchol (viz obrázek). Čísla v následujících odpovědích udávají obsahy jednotlivých trojúhelníků. Může nastat právě jedna možnost. Která?



- (A) 4, 5, 8, 9                      (B) 5, 6, 7, 12                      (C) 10, 11, 12, 19  
(D) 11, 13, 15, 16                      (E) žádná z předcházejících možností nenastane

20. Na obrázku jsou sestrojeny grafy funkcí  $f$  a  $g$  definovaných na množině reálných čísel. Která z následujících rovnic je splněna pro každé reálné číslo  $x$ ?

- (A)  $f(x) = -g(x) + 2$                       (B)  $f(x) = -g(x) - 2$   
 (C)  $f(x) = -g(x + 2)$                     (D)  $f(x + 2) = -g(x)$   
 (E)  $f(x + 1) = -g(x - 1)$

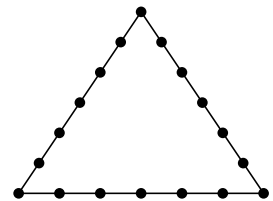


21. V řádku je za sebou zapsáno 200 nul. V prvním kroku přičteme ke každé nule číslo 1. Ve druhém kroku přičteme jedničku ke každému druhému číslu zleva. V třetím kroku přičteme jedničku ke každému třetímu číslu atd. Určete číslo, které je na 120. pozici zleva po 200 krocích.

- (A) 16                      (B) 12                      (C) 20                      (D) 24                      (E) 32

22. Určete, kolik různých trojúhelníků má vrcholy v některých z 18 bodů dělicích strany rovnostranného trojúhelníku na 18 shodných úseček.

- (A) 816                      (B) 711                      (C) 777                      (D) 717                      (E) 811

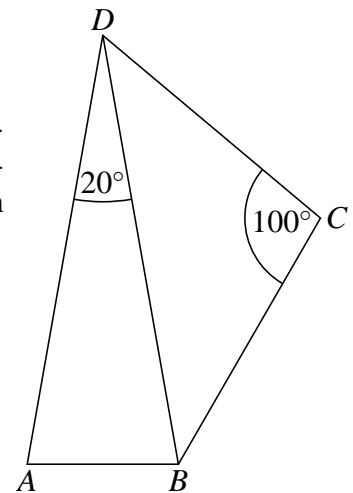


23. Jsou dány tři různé číslice  $a, b, c$ ,  $0 < a < b < c$  desítkové soustavy. Číslo 1554 je součet všech trojmístných čísel, jejichž zápis v desítkové soustavě obsahuje číslice  $a, b$  a  $c$ . Určete číslici  $c$ .

- (A) 3                      (B) 4                      (C) 5                      (D) 6                      (E) 7

24. Nechť  $ABCD$  je konvexní čtyřúhelník s jednotkovým obsahem takový, že  $AB$  a  $BD$  jsou po řadě základny rovnoramenných trojúhelníků  $ABD$  a  $BCD$  s vnitřními úhly při vrcholech  $D$  a  $C$  o velikostech  $20^\circ$  a  $100^\circ$ . (Viz obrázek.) Určete hodnotu součinu  $|AC| \cdot |BD|$ .

- (A)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       (B)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$                       (C)  $\sqrt{3}$   
 (D)  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$                       (E) jiná odpověď



### Správná řešení soutěžních úloh kategorie Student

1 D, 2 E, 3 D, 4 A, 5 E, 6 C, 7 C, 8 C, 9 D, 10 B, 11 E, 12 C, 13 E, 14 D, 15 C, 16 E, 17 A, 18 A, 19 A, 20 C, 21 A, 22 B, 23 B, 24 D.