Matematický KLOKAN 2011

www.matematickyklokan.net

kategorie **Student**

Úlohy za 3 body

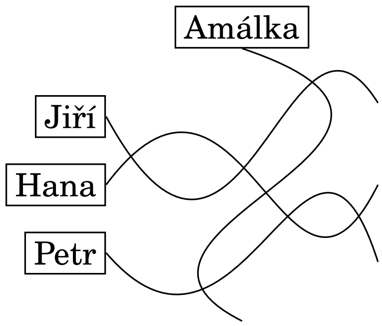
1. Závodu se zúčastnili Michael, Fernando a Sebastian. Ihned po startu vedl Michael, druhý byl Fernando a třetí Sebastian. Během závodu si pak Michael a Fernando vyměnili pořadí devětkrát, Fernando a Sebastian desekrát, Sebastian a Michael jedenáctkrát. V jakém pořadí dojeli do cíle?

(A) Michael, Fernando, Sebastian
(B) Sebastian, Michael, Fernando
(C) Sebastian, Fernando, Michael
(D) Fernando, Michael, Sebastian
(E) Fernando, Sebastian, Michael

2. Pro reálná čísla x a y platí $2^x = 15$ a $15^y = 32$. Určete hodnotu součinu xy.

(A) 5
(B) $\log_2 15 + \log_{15} 32$
(C) $\log_2 47$
(D) 7
(E) $\sqrt{47}$

3. Během plavby po rozbouřeném moři se Jana pokusila nakreslit plán své vesnice. Nakreslila čtyři ulice, jejich sedm křižovatek a domy svých přátel. Ve skutečnosti jsou však Rovná ulice, Hřebíková ulice a Pravítková ulice přímé. Čtvrtá ulice se jmenuje Křivá. Kdo v ní bydlí?

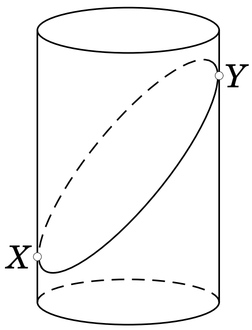


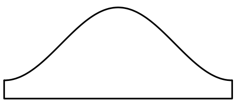
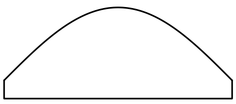
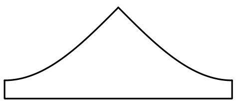
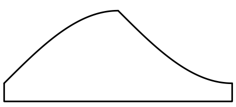
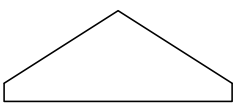
(A) Hana
(B) Petr
(C) Jiří
(D) Amálka
(E) nelze určit bez lepšího plánu

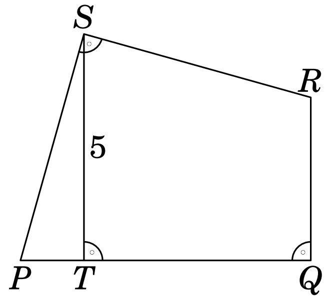
4. Všechna čtyřmístná čísla se součtem číslic 4 jsou seřazena od největšího k nejmenšímu. Kolikáté je číslo 2011?

(A) 6. (B) 7. (C) 8. (D) 9. (E) 10.

5. Obdélníkový list papíru byl obtočen kolem válce. Poté jsme válec s papírem rozřízli rovinným řezem procházejícím body X a Y dle obrázku. Dolní část papíru byla narovnána. Který z útvarů na obrázcích jsme mohli získat?



(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 



6. Na obrázku je čtyřúhelník $PQRS$, v němž platí $|PS| = |SR|$, $|\sphericalangle PSR| = |\sphericalangle PQR| = 90^\circ$, $ST \perp PQ$ a $|ST| = 5$. Určete obsah čtyřúhelníku $PQRS$.

(A) 20 (B) 22,5 (C) 25 (D) 27,5 (E) 30

7. Andrea napsala na tabuli všechna lichá čísla od 1 do 2011. Bára poté smazala všechny násobky tří. Kolik čísel zůstalo na tabuli?

(A) 335 (B) 336 (C) 671 (D) 1005 (E) 1006

8. Max a Hugo házejí několika hracími kostkami aby rozhodli, který z nich má skočit do ledového jezera. Jestliže nepadne žádná šestka, bude to Max; jestliže padne právě jedna šestka, bude to Hugo; jestliže padnou šestky aspoň dvě, neskočí ten den do jezera nikdo. Kolika kostkami házejí, jestliže oba mají stejnou pravděpodobnost skočit do jezera?

(A) 3 (B) 5 (C) 8 (D) 9 (E) 17

Úlohy za 4 body

9. Ze tří obdélníků byl sestaven bez překrývání a mezer pravoúhelník. První z obdélníků měl rozměry 7×11, druhý 4×8. Třetí z obdélníků byl zvolen tak, aby výsledný pravoúhelník měl největší možný obsah. Určete rozměry třetího obdélníku.

(A) 1×11 (B) 3×4 (C) 3×8 (D) 7×8 (E) 7×11

10. Michal chce vyplnit políčka tabulky 3×3 celými čísly tak, aby hodnota součtu všech čísel v každém čtverci 2×2 byla 10. Čtyři čísla už jsou zapsána. Které z následujících čísel může udávat hodnotu součtu zbývajících pěti čísel.

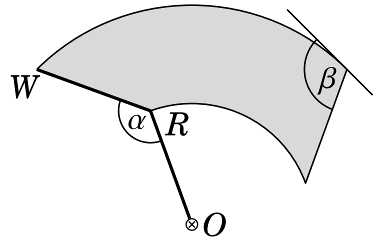
	2	
1		3
	4	

(A) 9 (B) 10 (C) 12
(D) 13 (E) žádná z možností (A)–(D)

11. Na výlet šlo 48 dětí. Šest z nich šlo s právě jedním sourozencem, devět dětí šlo právě s dvěma sourozenci a čtyři děti šly právě se třemi sourozenci. Zbytek dětí na výletě sourozence neměl. Z kolika rodin byly děti, které šly na výlet?

(A) 12 (B) 19 (C) 25 (D) 31 (E) 36

12. Stěrač čelního skla auta je sestrojen tak, že stěrka RW a raménko OR mají stejnou délku a svírají pevný úhel velikosti α. Stěrač se se otáčí kolem bodu O a stírá vyznačenou plochu. Určete velikost úhlu β, který svírá pravá strana stírané plochy s tečnou k jejímu hornímu okraji.



(A) $135° - \alpha$ (B) $45° + \alpha$ (C) $90° + \frac{\alpha}{2}$ (D) $135° - \frac{\alpha}{2}$ (E) $180° - \frac{\alpha}{2}$

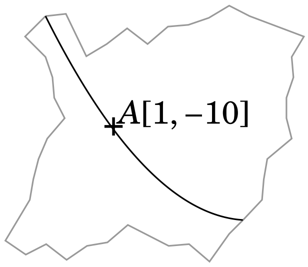
13. Bratři Alois a Bedřich pravdivě odpověděli na otázky týkající se jejich společného šachového klubu. Alois prohlásil: „Všichni členové našeho klubu s výjimkou pěti dívek jsou chlapci.“ Bedřich pravil: „Mezi libovolnými šesti členy našeho klubu jsou alespoň čtyři dívky.“ Kolik členů má šachový klub?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 12 (E) 18

14. V osudí je několik míčků. Na každém míčku je napsáno jedno přirozené číslo; všechna čísla jsou navzájem různá. Čísla dělitelná 6 jsou napsána na 30 míčcích, čísla dělitelná 7 jsou na 20 míčcích a čísla dělitelná 42 jsou na 10 z nich. Určete nejmenší možný počet míčků, které mohou být v osudí.

(A) 30 (B) 40 (C) 53 (D) 54 (E) 60

15. Na tabuli byla nakreslena (v kartézské soustavě souřadnic s obvyklou polohou os x a y) parabola $y = ax^2 + bx + c$ a na ní vyznačen bod $A[1, -10]$. Po smazání části tabule (včetně os) zůstala pouze část na obrázku. Které z následujících tvrzení může být nepravdivé?



(A) $a > 0$ (B) $b < 0$ (C) $a + b + c < 0$
(D) $b^2 > 4ac$ (E) $c < 0$

16. Ve výrazu

$$\frac{K \times A \times N \times G \times A \times R \times O \times O}{G \times A \times M \times E}$$

značí různá písmena různé číslice, stejná písmena stejné číslice. Najděte nejmenší možnou kladnou celočíselnou hodnotu, kterou tento výraz může nabýt.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 7

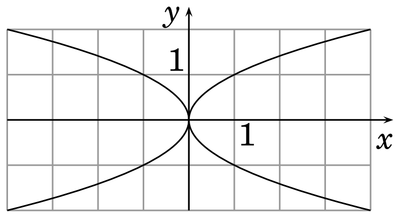
Úlohy za 5 bodů

17. Všechny strany šestiúhelníku $PQRSTU$ se dotýkají téže kružnice. Délky stran PQ, QR, RS, ST a TU jsou po řadě 5, 6, 7, 8 a 9. Vypočtěte délku strany UP.

(A) 8 (B) 7 (C) 6
(D) 1 (E) nelze z daných informací určit

18. Grafy kolika z funkcí $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8$, kde

f_1: $y = x^2$, f_2: $y = -x^2$, f_3: $y = \sqrt{x}$, f_4: $y = -\sqrt{x}$,
f_5: $y = \sqrt{-x}$, f_6: $y = -\sqrt{-x}$, f_7: $y = \sqrt{|x|}$, f_8: $y = -\sqrt{|x|}$



můžeme vidět na obrázku?

(A) žádné (B) 2 (C) 4
(D) 6 (E) všech 8

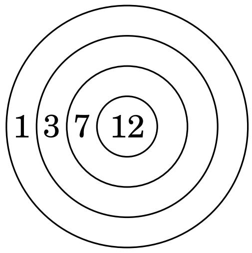
19. Najděte součet všech přirozených čísel x menších než 100, pro která je číslo $x^2 - 81$ dělitelné 100.

(A) 200 (B) 100 (C) 90 (D) 81 (E) 50

20. Posloupnost reálných funkcí $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ vyhovuje pro každé reálné číslo x následujícím dvěma podmínkám: $f_1(x) = x$ a $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{1 - f_n(x)}$ pro přirozená čísla n.
Najděte $f_{2011}(2011)$.

(A) 2011 (B) $-\dfrac{1}{2010}$ (C) $\dfrac{2010}{2011}$ (D) 1 (E) -2011

21. Robin Hood vystřelil tři šípy do terče na obrázku; čísla udávají počet bodů za zásah vyznačené oblasti. Všemi šípy zasáhl cíl. Vyznačte počet všech různých hodnot součtů bodů, které mohl získat.



(A) 13 (B) 17 (C) 19 (D) 20 (E) 21

22. Nechť a, b, c jsou přirozená čísla taková, že $a^2 = 2b^3 = 3c^5$. Zjistěte nejmenší možný počet dělitelů jejich součinu abc (včetně 1 a abc).

(A) 30 (B) 49 (C) 60 (D) 77 (E) 1 596

23. Do políček tabulky 4×5 je zapsáno 20 navzájem různých přirozených čísel. Čísla na libovolných dvou sousedních políčkách (políčka se společnou stranou) mají společného dělitele většího než 1. Označme n největší číslo zapsané do tabulky. Najděte nejmenší možnou hodnotu n.

(A) 21 (B) 24 (C) 25 (D) 26 (E) 40

24. Krychle 3×3×3 je složena z 27 stejných malých krychlí. Rovina kolmá k tělesové úhlopříčce velké krychle prochází jejím středem. Kolik malých krychlí tato rovina protíná?

(A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20 (E) 21

Student

1 E, 2 A, 3 A, 4 D, 5 A, 6 C, 7 C, 8 B, 9 D, 10 E, 11 E, 12 E, 13 B, 14 B, 15 E, 16 B, 17 B, 18 D, 19 A, 20 A, 21 C, 22 D, 23 D, 24 C.