



Úlohy za 3 body

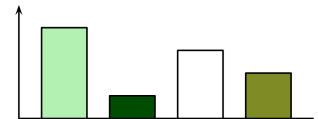
1. Co získáme úpravou výrazu  $(a - b)^5 + (b - a)^5$  pro libovolná reálná čísla  $a, b$ ?

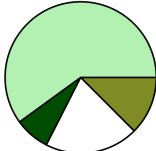
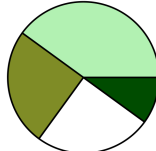

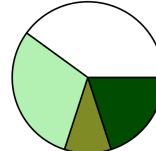
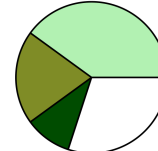
- (A) 0 (B)  $2(a - b)^5$  (C)  $2a^5 - 2b^5$   
(D)  $2a^5 + 2b^5$  (E)  $2a^5 + 10a^4b + 20a^3b^2 + 20a^2b^3 + 10ab^4 + 2b^5$

2. Kolik řešení v oboru reálných čísel má rovnice  $2^{2x} = 4^{x+1}$ ?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2  
(D) 3 (E) nekonečně mnoho

3. Dana zaznamenala do sloupcového grafu (vpravo) počty čtyř druhů stromů nalezených při biologické vycházce. Jarda si myslí, že koláčový graf lépe znázorní četnost jejich výskytu. Který z grafů má Jarda nakreslit?

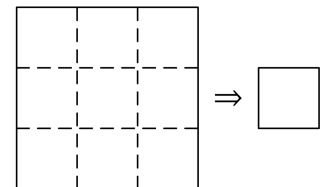


- (A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

4. Sečteme všechna přirozená čísla od 2001 do 2031 a výsledek vydělíme 31. Které číslo dostaneme?

- (A) 2012 (B) 2013 (C) 2015 (D) 2016 (E) 2496

5. Čtvercový list papíru na obrázku složíme nějakým způsobem po vyznačených čarách. Z výsledného čtverečku odstříhneme právě jeden vrchol a list opět rozložíme. Kolik děr bude uvnitř papíru?



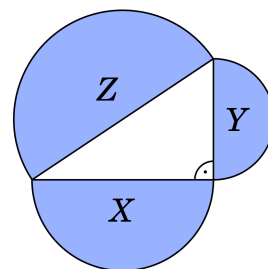
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 9

6. V osudí je 2015 míčeků očíslovaných čísly  $1, 2, \dots, 2015$ . Míčky, na kterých jsou čísla se stejným součtem číslic, mají stejnou barvu. Pokud jsou součty číslic na dvou míčcích různé, mají tyto míčky různé barvy. Kolika různými barvami jsou míčky v osudí označeny?

- (A) 10 (B) 27 (C) 28 (D) 29 (E) 2015

7. Na obrázku jsou nad stranami pravouhlého trojúhelníku sestrojeny tři polokruhy s obsahy  $X \text{ cm}^2$ ,  $Y \text{ cm}^2$  a  $Z \text{ cm}^2$ . Který z následujících výroků je vždy pravdivý?

- (A)  $X + Y < Z$       (B)  $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{Z}$       (C)  $X^2 + Y^2 = Z^2$   
 (D)  $X^2 + Y^2 = Z$       (E)  $X + Y = Z$



8. Vyberte odpověď, která udává všechny možné počty ostrých vnitřních úhlů v konvexním čtyřúhelníku.

- (A) 0, 1, 2      (B) 0, 1, 2, 3      (C) 0, 1, 2, 3, 4      (D) 0, 1, 3      (E) 1, 2, 3

**Úlohy za 4 body**

9. Určete hodnotu  $\sqrt{(2015 + 2015) + (2015 - 2015) + (2015 \cdot 2015) + (2015 : 2015)}$ .

- (A)  $\sqrt{2015}$       (B) 2015      (C) 2016      (D) 2017      (E) 4030

10. Na kolik částí rozdělí rovinu osa  $x$  spolu s grafy funkcí  $f(x) = 2 - x^2$  a  $g(x) = x^2 - 1$  v kartézské soustavě souřadnic?

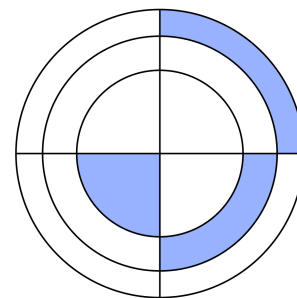
- (A) 7      (B) 8      (C) 9      (D) 10      (E) 11

11. Geometrický průměr  $n$  kladných reálných čísel definujeme jako  $n$ -tou odmocninu jejich součinu. Na tabuli je napsáno 6 kladných reálných čísel. Geometrický průměr prvních tří je 3, geometrický průměr posledních tří je 12. Kolik je geometrický průměr všech čísel na tabuli?

- (A) 4      (B) 6      (C)  $\frac{15}{2}$       (D)  $\frac{15}{6}$       (E) 36

12. Na obrázku mají všechny tři vyznačené části mezi soustřednými kružnicemi a jejich kolmými průměry stejný obsah. Poloměr nejmenší kružnice je přitom 1. Určete součin poloměrů všech tří kružnic na obrázku.

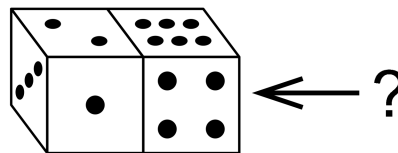
- (A)  $\sqrt{6}$       (B) 3      (C)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$       (D)  $2\sqrt{2}$       (E) 6



13. Autosalon koupil dvě auta. První poté prodal se ziskem 40% a druhé se ziskem 60%. Jeho celkový zisk z prodeje těchto dvou aut byl 54%. Určete poměr mezi nákupními cenami obou vozů.

- (A) 10:13      (B) 20:27      (C) 7:12      (D) 2:3      (E) 3:7

14. Standardní kostka má na každé dvojici protějších stěn celkem 7 bodů. Na obrázku jsou dvě shodné standardní kostky. Kolik bodů je na (skryté) boční stěně označené otazníkem?



- (A) právě 5                      (B) právě 2                      (C) buď 2, nebo 5  
 (D) buď 1, 2, 3, nebo 5        (E) buď 2, 3, nebo 5

15. Najděte první výrok zleva, který je pravdivý.

- (A) „(C) platí“    (B) „(A) platí“    (C) „(E) neplatí“    (D) „(B) neplatí“    (E) „ $1 + 1 = 2$ “

16. Na obrázku vidíme tabulku násobení čísel od 1 do 10. Určete součet všech sta součinů v této tabulce.

$\times$	1	2	3	$\dots$	10
1	1	2	3	$\dots$	10
2	2	4	6	$\dots$	20
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
10	10	20	30	$\dots$	100

- (A) 1000 (B) 2025 (C) 2500 (D) 3025 (E) 5500

**Úlohy za 5 bodů**

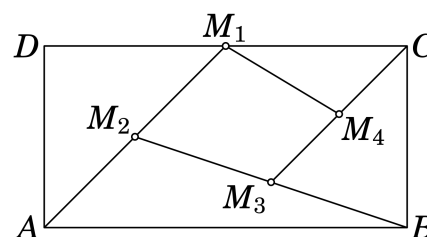
17. Kolik existuje pravouhlých trojúhelníků  $ABC$  s pravým úhlem při vrcholu  $B$  takových, že  $|AB| = 20$  a délky zbývajících stran jsou vyjádřeny přirozenými čísly.

- (A) 1                      (B) 2                      (C) 3                      (D) 4                      (E) 6

18. Kolik trojmístných čísel můžeme vyjádřit jako součet právě devíti různých nezáporných celých mocnin čísla 2.

- (A) 1                      (B) 2                      (C) 3                      (D) 4                      (E) 5

19. Uvažujme pravouhelník  $ABCD$ . Označme  $M_1$  střed úsečky  $DC$ ,  $M_2$  střed úsečky  $AM_1$ ,  $M_3$  střed úsečky  $BM_2$  a  $M_4$  střed úsečky  $CM_3$ . Určete poměr obsahů čtyřúhelníků  $M_1M_2M_3M_4$  a  $ABCD$ .



- (A) 3:16                      (B) 7:16                      (C) 7:32                      (D) 9:32                      (E) 1:5

20. Na tabuli jsou nakresleny červené a modré pravouhelníky. Právě 7 z nich jsou čtverce. Na tabuli je o 3 více červených pravouhelníků než modrých čtverců. Také je tam o 2 více červených čtverců než modrých pravouhelníků. Kolik modrých pravouhelníků je na tabuli.

- (A) 1                      (B) 3                      (C) 5                      (D) 6                      (E) 10

21. Kolik typů pravidelných mnohoúhelníků má velikosti vnitřních úhlů ve stupních vyjádřeny přirozenými čísly?

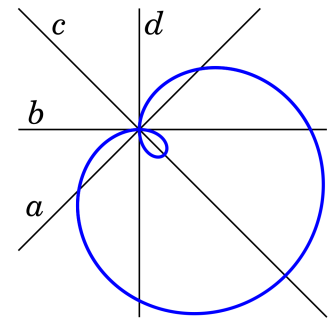
- (A) 17                      (B) 18                      (C) 22                      (D) 25                      (E) 60

22. Na obrázku je v kartézské soustavě souřadnic množina všech bodů  $(x, y)$  vyhovujících rovnici

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 2(x^2 + y^2).$$

Která z přímek  $a, b, c, d$  znázorňuje osu  $y$ ?

- (A)  $a$                       (B)  $b$                       (C)  $c$   
(D)  $d$                       (E) žádná z nich



23. 96 členů počítařského klubu vytvořilo velkou kružnici. Jedním směrem se začnou odpočítávat 1, 2, 3 atd. Každý člen, který řekne sudé číslo, z kružnice odstoupí. Tímto způsobem pokračují dále začínající druhé kolo od 97 a skončí, až v kružnici zůstane poslední člen. Které číslo řekl tento člen v 1. kole?

- (A) 1                      (B) 17                      (C) 33                      (D) 65                      (E) 95

24. Bob a Bobek nahradili ve slově *KANGAROO* písmena číslicemi tak, že výsledné číslo je dělitelné 11. Různá písmena nahradili různými číslicemi, stejná písmena nahradili stejnými číslicemi ( $K \neq 0$ ). Bob takto získal největší možné číslo a Bobek nejmenší možné číslo. Přitom oba jedno písmeno nahradili stejnou číslicí. Kterou?

- (A) 0                      (B) 3                      (C) 4                      (D) 5                      (E) 6

## **Správná řešení soutěžních úloh**

### **STUDENT 2015**

Úlohy za 3 body

1 A, 2 A, 3 E, 4 D, 5 B, 6 C, 7 E, 8 B

Úlohy za 4 body

9 C, 10 D, 11 B, 12 A, 13 E, 14 A, 15 D, 16 D

Úlohy za 5 bodů

17 D, 18 E, 19 C, 20 B, 21 C, 22 A, 23 D, 24 D