

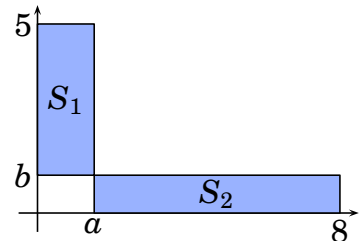


Úlohy za 3 body

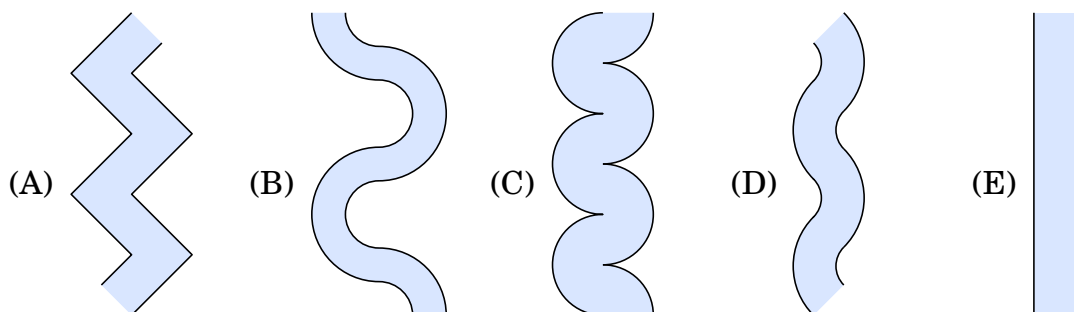
1. Kolik celých čísel je větších než $2015 \cdot 2017$ a současně menších než $2016 \cdot 2016$?
(A) 0 (B) 1 (C) 2015 (D) 2016 (E) 2017
2. Pro celá kladná čísla a, b, c, d platí $a + 2 = b - 2 = c \cdot 2 = d : 2$. Které z těchto čísel je největší?
(A) a (B) b (C) c
(D) d (E) nelze jednoznačně určit

3. V soustavě souřadnic na obrázku vidíte pravoúhelníky S_1 a S_2 se stejným obsahem a společným vrcholem. Určete hodnotu podílu $\frac{a}{b}$.

- (A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{7}{4}$ (E) $\frac{8}{5}$

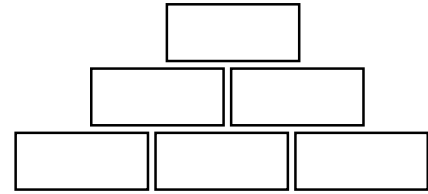


4. Reálné číslo x vyhovuje rovnici $x^2 - 4x + 2 = 0$. Určete hodnotu $x + \frac{2}{x}$.
(A) -4 (B) -2 (C) 0 (D) 2 (E) 4
5. O úseku řeky je známo, že z každého bodu jejího břehu má nejkratší most přes řeku stejnou délku. Který z následujících obrázků *neznázorňuje* tento úsek?



6. Úhlopříčka AC pravoúhelníku $ABCD$ má dvojnásobnou délku než jeho strana BC . Nechť M je bod strany CD takový, že $|AM| = |MC|$. Určete velikost úhlu CAM .
(A) 15° (B) $22,5^\circ$ (C) 45°
(D) 60° (E) jiná hodnota

7. Číslo napsané v každém poli horní a prostřední řady obrázku vpravo je rovno součinu obou čísel v polích, která leží bezprostředně pod ním. Dolní řada obsahuje přirozená čísla větší než jedna. Které z následujících čísel *nemůže* být v horním poli?



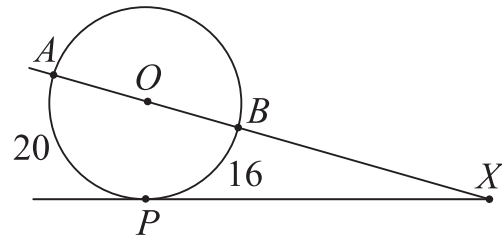
(A) 56 (B) 84 (C) 90 (D) 105 (E) 220

8. Je dáno $x_1 = 2$ a pro všechna přirozená čísla n dále platí $x_{n+1} = x_n^{x_n}$. Vypočtěte x_4 .

(A) 2^{2^3} (B) 2^{2^4} (C) $2^{2^{11}}$ (D) $2^{2^{16}}$ (E) $2^{2^{768}}$

Úlohy za 4 body

9. Nechť X je vnější bod kružnice, který leží na přímce AB , kde úsečka AB je průměrem kružnice. Tečna kružnice z bodu X se jí dotýká v bodě P . Délky oblouků AP a BP jsou po řadě 20 a 16. Určete velikost úhlu AXP .



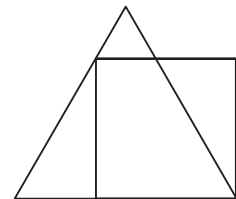
(A) 30° (B) 24° (C) 18° (D) 15° (E) 10°

10. Každá z rovnic $x^2 + ax + b = 0$ a $x^2 + bx + a = 0$ s reálnými parametry a a b ($a \neq b$) má dva reálné kořeny. Součet druhých mocnin kořenů první z nich je roven součtu druhých mocnin kořenů druhé rovnice. Určete hodnotu $a + b$.

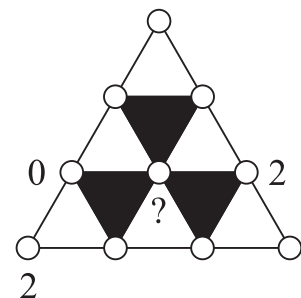
(A) -4 (B) -2 (C) 0
(D) 4 (E) nelze jednoznačně určit

11. Jeden vrchol čtverce o obvodu 4 splývá s vrcholem rovnostranného trojúhelníku a další dva leží na stranách tohoto trojúhelníku (viz obr.). Určete obvod trojúhelníku.

(A) $4 + \sqrt{3}$ (B) $3 + \sqrt{3}$ (C) $3 + \sqrt{2}$ (D) 4 (E) 3



12. Každému z deseti vyznačených bodů na obrázku je přiřazeno jedno z čísel 0, 1, 2 (tři z přiřazených čísel jsou známa). Přitom součet všech čísel u vrcholů každého bílého trojúhelníku je dělitelný 3 a součet všech čísel u vrcholů každého černého trojúhelníku není dělitelný 3. Které číslo je přiřazeno společnému vrcholu tří černých trojúhelníků?



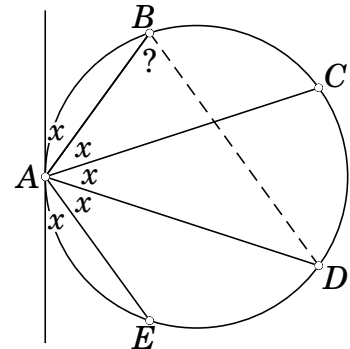
(A) jen 0 (B) jen 1 (C) jen 2
(D) buď 0, nebo 1 (E) buď 0, nebo 1, nebo 2

13. Kolik různých řešení v oboru reálných čísel má rovnice

$$(x^2 - 4x + 5)^{x^2+x-30} = 1?$$

- (A) 1 (B) 2 (C) 3
(D) 4 (E) nekonečně mnoho

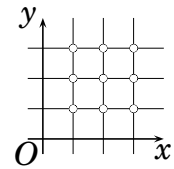
14. Běta vyznačila na kružnici body A, B, C, D, E a v bodě A sestrojila tečnu k této kružnici. Všech pět úhlů s vrcholem A , na obrázku označených x , má stejnou velikost. Určete velikost úhlu ABD .



- (A) 66° (B) $70,5^\circ$ (C) 72° (D) 75° (E) $77,5^\circ$

15. Kolik kvadratických funkcí proměnné x má vlastnost, že jejich graf prochází alespoň třemi z vyznačených mřížových bodů kartézské soustavy souřadnic na obrázku?

- (A) 6 (B) 18 (C) 19 (D) 22 (E) jiný počet



16. Uvnitř krychle je dán bod M . Krychle je rozřezána na 6 čtyřbokých jehlanů s vrcholem M , jejichž podstavy tvoří stěny krychle. Objemy pěti z těchto jehlanů jsou 2, 5, 10, 11 a 14. Určete objem šestého jehlanu.

- (A) 1 (B) 4 (C) 6 (D) 9 (E) 12

Úlohy za 5 bodů

17. Na kouzelném ostrově žijí jen poctiví (mluví vždy pravdu) a lháři (vždy lžou). Cestovatel uviděl sedm ostrovanů sedět kolem ohně. Každý z nich řekl: „Sedím mezi dvěma lháři.“ Kolik lhářů sedí u ohně?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5
(D) 6 (E) nelze jednoznačně určit

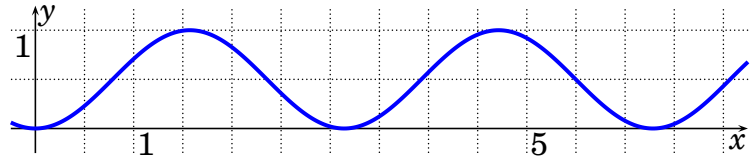
18. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu A se osy jeho vnitřních úhlů při přeponě protínají v bodě P , jehož vzdálenost od přepony je $\sqrt{8}$. Vypočítejte vzdálenost bodů A a P .

- (A) 3 (B) $\sqrt{10}$ (C) $\sqrt{12}$ (D) 4 (E) 8

19. Na tabuli jsou napsána tři trojmístná čísla. K jejich zápisu jsou použity všechny číslice od 1 do 9. Které z následujících čísel *nemůže* být součtem tří na tabuli napsaných čísel?

- (A) 1500 (B) 1503 (C) 1512 (D) 1521 (E) 1575

20. Na obrázku vidíte graf jedné z uvedených funkcí. Které?

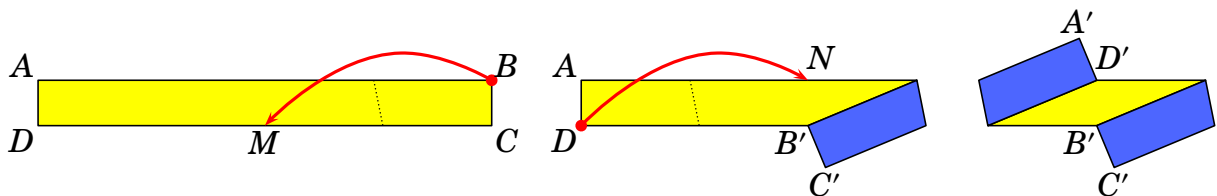


- (A) $y = \sin 2x$ (B) $y = \frac{\cos 2x}{2}$ (C) $y = \frac{1 - \cos x}{2}$
 (D) $y = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ (E) $y = \sin^2 x$

21. Anna sečetla všechna přirozená čísla od 1 do n a zjistila, že prvočíslo p , které dělí tento součet, není dělitelem žádného ze sčítanců. Které z následujících čísel může být součtem $n + p$?

- (A) 217 (B) 221 (C) 229 (D) 245 (E) 269

22. Obdélníkový pruh papíru $ABCD$ na stole je 5 cm široký a 50 cm dlouhý. Jeho horní plocha je světlá a spodní tmavá. Kristýna přeložila tento pruh podle obrázku tak, že vrchol B umístila do středu M strany CD a vrchol D umístila do středu N strany AB . Vypočítejte obsah viditelné světlé části pruhu na obrázku vpravo.

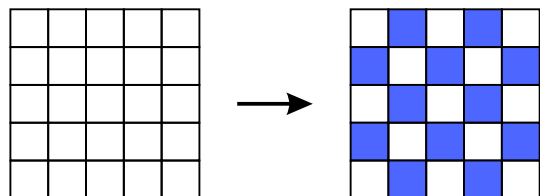


- (A) 50 cm^2 (B) 60 cm^2 (C) $62,5 \text{ cm}^2$ (D) 75 cm^2 (E) 90 cm^2

23. Přirozené číslo n má právě 6 kladných dělitelů (včetně 1 a n). Součin pěti z nich je 648. Který je jeho zbývající (šestý) dělitel?

- (A) 4 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 24

24. Na počátku jsou všechna pole čtvercové tabulky 5×5 bílá. V jednom kroku vybereme tři sousední pole téže řady (řádku nebo sloupce) a zaměníme jejich barvy z bílé na tmavou a z tmavé na bílou. Určete nejmenší možný počet kroků, po kterých bude tabulka obarvená jako šachovnice na obrázku vpravo.



- (A) méně než 10 (B) 10 (C) 12
 (D) více než 12 (E) je to nemožné