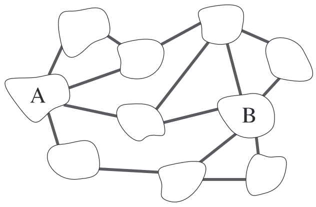
Úlohy za 3 body

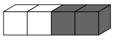
1. Na obrázku vidíte deset ostrovů spojených patnácti mosty. Určete nejmenší možný počet mostů, které musíme odstranit, aby se nedalo po mostech přejít z ostrova A na ostrov B.

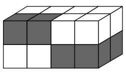
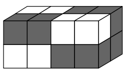
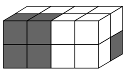
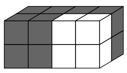
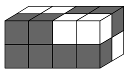


(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

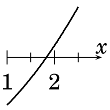
2. Pro dvě kladná reálná čísla a a b platí, že 75 % z a je rovno 40 % z b. Která z rovností je pravdivá?

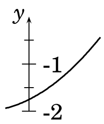
(A) $15a = 8b$ (B) $12a = 5b$ (C) $3a = 2b$ (D) $5a = 12b$ (E) $8a = 15b$

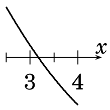
3. Ze dvou sousedících bílých a dvou sousedících tmavých krychlí je slepen hranol 4×1×1 . Jedno z následujících těles můžeme sestavit ze čtyř takových hranolů. Které?

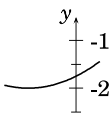
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

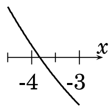
4. Na čtyřech z následujících obrázků jsou části grafu téže kvadratické funkce. Na kterém obrázku není část grafu této funkce?

(A) 

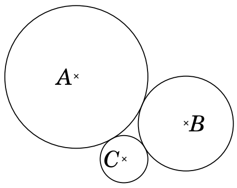
(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

5. Uvažujme tři navzájem se dotýkající kružnice se středy A, B, C a poloměry po řadě 3 cm, 2 cm, 1 cm podle obrázku. Určete obsah trojúhelníku ABC.



(A) $6\,\text{cm}^2$ (B) $4\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ (C) $3\sqrt{2}\,\text{cm}^2$
(D) $9\,\text{cm}^2$ (E) $2\sqrt{6}\,\text{cm}^2$

6. Graf které z následujících funkcí má nejvíce společných bodů s grafem funkce $f(x) = x$?

(A) $g_1(x) = x^2$ (B) $g_2(x) = x^3$ (C) $g_3(x) = x^4$ (D) $g_4(x) = -x^4$ (E) $g_5(x) = -x$

7. Každá z následujících krabic obsahuje červené a modré koule podle popisu. Bára z krabice náhodně vytáhne jednu kouli. Kterou krabici si má Bára vybrat, aby pravděpodobnost vytažení modré koule byla největší?

(A) 6 modrých, 4 červené (B) 7 modrých, 7 červených (C) 8 modrých, 6 červených

(D) 10 modrých, 8 červených (E) 12 modrých, 9 červených

8. Kladné reálné číslo p je menší než 1 a reálné číslo q je větší než 1. Které z následujích čísel je největší?

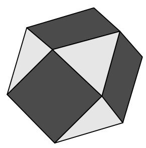
(A) $p+q$ (B) $p \cdot q$ (C) $\frac{p}{q}$ (D) p (E) q

Úlohy za 4 body

9. Kolik přirozených čísel má následující vlastnost: Po odstranění jeho poslední číslice dostaneme $\frac{1}{14}$ původního čísla?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

10. Mnohostěn na obrázku má pouze trojúhelníkové nebo čtvercové stěny. Každý čtverec sousedí se čtyřmi trojúhelníky a každý trojúhelník sousedí se třemi čtverci. Mnohostěn má 6 čtvercových stěn. Kolik má trojúhelníkových stěn?



(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

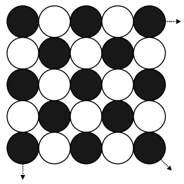
11. Uvažujme všechny rovnice tvaru $5x^3 + ax^2 + bx + 24 = 0$ s celočíselnými koeficienty a a b. Které z následujících čísel nemůže být kořenem žádné z těchto rovnic?

(A) 1 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 12

12. Rotační válce A a B mají stejný objem. Poloměr podstavy válce B je o 10 % větší než poloměr podstavy válce A. O kolik procent je výška válce A větší než výška válce B?

(A) o 5 % (B) o 10 % (C) o 11 % (D) o 20 % (E) o 21 %

13. Julie má 1009 tmavých a 1008 bílých koleček stejné velikosti. Skládá je do vzoru podle obrázku. Začíná tmavým kolečkem vlevo nahoře, přitom pravidelně střídá barvy v každém řádku a každém sloupci. Kolik jí zbude koleček, když vytvoří co největší čtverec?



(A) žádné (B) 40 každé z barev (C) 40 tmavých a 41 bílých
(D) 41 každé z barev (E) 40 bílých a 41 tmavých

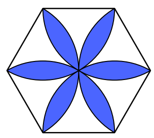
14. Regulérní hrací kostka tvaru pravidelného čtyřstěnu má stěny označeny čísly 2, 0, 1 a 7. Hodíme čtyřmi takovými kostkami. Určete pravděpodobnost jevu: Kostky můžeme poté sestavit tak, že vznikne číslo 2017 užitím vždy právě jedné ze tří shora viditelných stěn každé kostky.

(A) $\frac{1}{256}$ (B) $\frac{63}{64}$ (C) $\frac{81}{256}$ (D) $\frac{3}{32}$ (E) $\frac{29}{32}$

15. Pro dvě po sobě jdoucí přirozená čísla platí, že jejich ciferné součty jsou dělitelné 7. Určete nejmenší možný počet číslic menšího z nich.

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

16. Na obrázku je pravidelný šestiúhelník se stranou délky 1 cm. Vyznačený květ ohraničují oblouky kružnic o poloměru 1 cm se středy ve vrcholech šestiúhelníku. Určete obsah květu v cm^2.



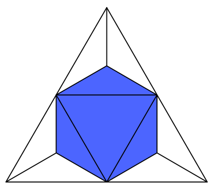
(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $2\sqrt{3}-\pi$ (D) $\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}$ (E) $2\pi-3\sqrt{3}$

Úlohy za 5 bodů

17. Nechť $a_1 = 2017$ a pro všechna přirozená čísla n platí $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n}$. Určete a_{2017}.

(A) -2017 (B) $-\frac{1}{2016}$ (C) $\frac{2016}{2017}$ (D) 1 (E) 2017

18. Vrcholy tmavého mnohostěnu na obrázku jsou středy všech hran daného pravidelného čtyřstěnu. Určete poměr objemů tmavého mnohostěnu a daného čtyřstěnu.



(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{4}{5}$

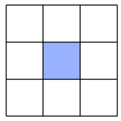
19. Obvod pravoúhlého trojúhelníku je 18 cm a součet obsahů čtverců sestrojených nad jeho stranami je $128\,\text{cm}^2$. Určete obsah tohoto trojúhelníku v cm^2.

(A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 16 (E) 18

20. Trojmístné číslo $\overline{ABC}$ má následující vlastnosti. Číslo $(A+B)^C$ je trojmístné a je celou mocninou čísla 2. Kolik takových čísel $\overline{ABC}$ existuje?

(A) 6 (B) 13 (C) 18 (D) 20 (E) 21

21. Do každého pole tabulky 3×3 je napsáno celé číslo. Součet všech těchto devíti čísel je 500. Čísla v sousedních polích se liší o 1 (za sousední považujeme dvě pole tabulky, která mají společnou celou stranu). Které číslo je ve středu tabulky?

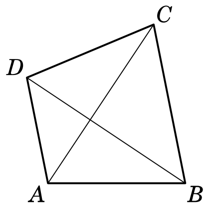


(A) 50 (B) 54 (C) 55 (D) 56 (E) 57

22. Pro reálná čísla x a y platí $|x| + x + y = 5$ a $x + |y| - y = 10$. Určete hodnotu součtu $x + y$.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

23. Úhlopříčky konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ jsou navzájem kolmé. Pro délky jeho stran platí $|AB| = 17\,\text{cm}$, $|BC| = 18\,\text{cm}$, $|CD| = 19\,\text{cm}$. Určete délku zbývající strany AD v cm.



(A) 16 (B) 18 (C) $\sqrt{20^2 - 4}$
(D) 20 (E) $\sqrt{18^2 + 2}$

24. Každý z 2017 obyvatel ostrova je buď pravdomluvný (vždy mluví pravdu) nebo lhář (vždy lže). Více než tisíc ostrovanů přišlo na banket a usadilo se kolem kulatého stolu. Každý z nich prohlásil o dvou svých sousedech: „Vedle mě sedí jeden pravdomluvný a jeden lhář.“ Určete největší možný počet pravdomluvných lidí na ostrově.

(A) 668 (B) 1344 (C) 1345 (D) 1683 (E) 2016

Správná řešení soutěžních úloh

STUDENT 2017

Úlohy za 3 body
1 B, 2 A, 3 B, 4 C, 5 A, 6 B, 7 A, 8 A,

Úlohy za 4 body
9 C, 10 D, 11 B, 12 E, 13 E, 14 B, 15 C, 16 E,

Úlohy za 5 bodů
17 E, 18 A, 19 A, 20 E, 21 D, 22 A, 23 E, 24 D.