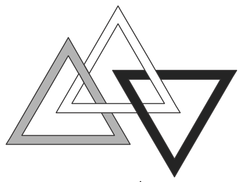
Matematický KLOKAN 2019

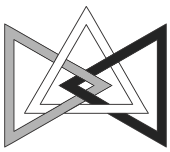
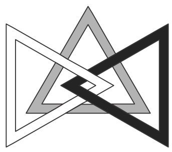
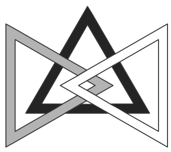
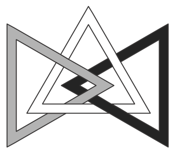
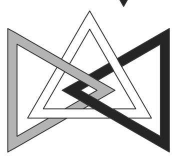
www.matematickyklokan.net

kategorie **Student**

Úlohy za 3 body

1. Na kterém z následujících obrázků jsou tři trojúhelníky propojeny stejně jako na obrázku vpravo?

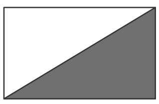
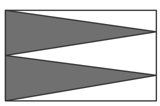
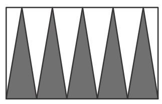
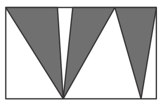
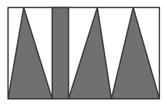


(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

2. Jehlan má 23 trojúhelníkových stěn. Kolik má hran?

(A) 23 (B) 24 (C) 46 (D) 48 (E) 69

3. Ve shodných obdélnících jsou tmavě vyznačeny dotýkající se trojúhelníky nebo rovnoběžníky s vrcholy na stranách obdélníků. Ve kterém z obrázků je obsah tmavě vyznačené plochy největší?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

4. Určete první číslici (zleva) nejmenšího přirozeného čísla, jehož součet číslic je 2019.

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

5. Michal zavedl pro reálná čísla x, y novou operaci předpisem $x \nabla y = y - x$. Reálná čísla a, b, c splňují rovnost $(a \nabla b) \nabla c = a \nabla (b \nabla c)$. Který z následujících vztahů nutně platí?

(A) $a = 0$ (B) $c = 0$ (C) $a = b$ (D) $b = c$ (E) $a = c$

6. Kolik přirozených čísel od 2^{10} do 2^{13} včetně je dělitelných 2^{10}?

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 16

7. Určete největší přirozenou mocninu čísla 3, která dělí součet $7! + 8! + 9!$. (Přitom pro přirozená čísla n definujeme $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.)

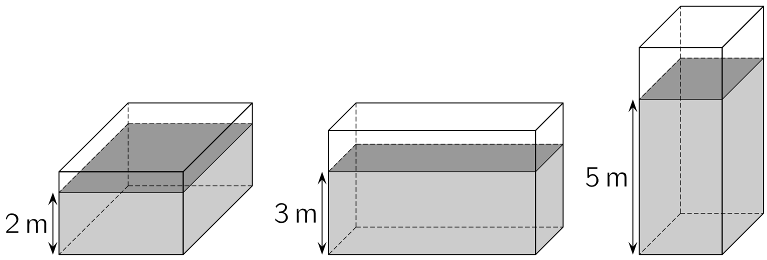
(A) 3^2 (B) 3^4 (C) 3^5
(D) 3^6 (E) vyšší než 6. mocnina 3

8. Tři klokani, Ámos, Bivoj a Ctirad, chodí denně na procházku. Jestliže si Ámos vezme klobouk, potom si jej vezme i Bivoj. Jestliže si Bivoj nevezme kloubouk, potom si jej vezme Ctirad. Ctirad dnes klobouk nemá. Kdo jej jistě má?

(A) pouze Ámos (B) pouze Bivoj (C) pouze Ámos a Bivoj
(D) Ámos, Bivoj a Ctirad (E) nikdo jej nemá

Úlohy za 4 body

9. Nádrž tvaru kvádru je částečně naplněna $120\,\mathrm{m}^3$ vody. Podle toho, na které stěně leží, je hladina vody ve výškách $2\,\mathrm{m}$, $3\,\mathrm{m}$ nebo $5\,\mathrm{m}$. Určete objem nádrže.



(A) $160\,\mathrm{m}^3$ (B) $180\,\mathrm{m}^3$ (C) $200\,\mathrm{m}^3$ (D) $220\,\mathrm{m}^3$ (E) $240\,\mathrm{m}^3$

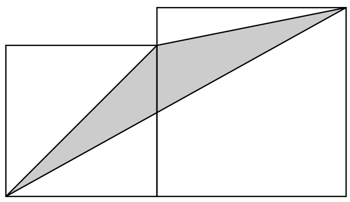
10. Ve srovnání s minulým rokem se letos počet chlapců ve třídě zvětšil o 20 % a počet dívek se zmenšil o 20 %. Ve třídě je tak o jednoho žáka více. Kolik může mít třída letos žáků?

(A) 22 (B) 26 (C) 29 (D) 31 (E) 34

11. Přirozené číslo n nazveme *dobré*, jestliže jeho druhý největší dělitel (po n) je $n-6$. Kolik dobrých čísel existuje?

(A) 1 (B) 2 (C) 3
(D) 6 (E) nekonečně mnoho

12. Na obrázku jsou dva dotýkající se čtverce s jedním společným vrcholem a stranami délek a a b ($a < b$). Určete obsah tmavého trojúhelníku s vrcholy ve vrcholech čtverců.



(A) $\sqrt{ab}$ (B) $\frac{1}{2}a^2$ (C) $\frac{1}{2}b^2$
(D) $\frac{1}{4}(a^2+b^2)$ (E) $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$

13. Určete největší celé číslo, které je menší než $\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}}}}$.

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 20 (E) 25

14. Nechť a je součet všech kladných dělitelů čísla 1024 a b je jejich součin. Která z rovností platí?

(A) $(a-1)^5 = b$ (B) $(a+1)^5 = b$ (C) $a^5 = b$ (D) $a^5 - 1 = b$ (E) $a^5 + 1 = b$

15. Určete množinu všech hodnot parametru a, pro které má rovnice $2 - |x| = ax$ právě dvě různá reálná řešení.

(A) $(-\infty; -1\rangle$ (B) $(-1; 1)$ (C) $\langle 1; +\infty)$ (D) $\{0\}$ (E) $\{-1; 1\}$

16. Kolik různých rovin prochází aspoň třemi různými vrcholy dané krychle?

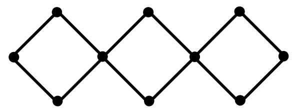
(A) 6 (B) 8 (C) 12 (D) 16 (E) 20

Úlohy za 5 bodů

17. Krabice obsahuje čtyři čokoládové a jednu ovocnou tyčinku. Jakub a Milada střídavě (bez vracení) náhodně vytahují po jedné tyčince. Vyhraje ten, který vytáhne ovocnou tyčinku. Jakub začíná. Určete pravděpodobnost, že vyhraje Milada.

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{6}$ (E) $\frac{1}{3}$

18. Různým vrcholům sítě na obrázku jsou po jednom přiřazena různá přirozená čísla od 1 do 10. Součty S čtyř čísel u vrcholů každého ze tří čtverců jsou stejné. Určete nejmenší možnou hodnotu S.



(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 21 (E) 22

19. Sára na kalkulačce při výpočtu $\frac{a+b}{c}$, kde a, b, c jsou přirozená čísla, po postupném stisknutí tlačítek $a + b \div c =$ získala výsledek 11. Po zadání $b + a \div c =$ dostala výsledek 14. Její kalkulačka totiž dává dělení přednost před sčítáním. Určete hodnotu $\frac{a+b}{c}$.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

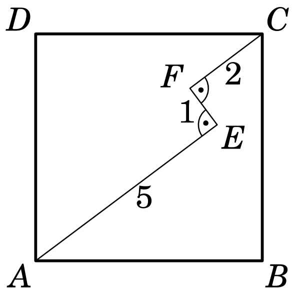
20. Čtyři přímky procházející počátkem protínají parabolu $y = x^2 - 2$ v osmi bodech. Které číslo získáme vynásobením x-ových souřadnic těchto osmi bodů?

(A) jen 16 (B) jen −16 (C) jen 8
(D) jen −8 (E) je více možných výsledků

21. Pro kolik celých čísel n je $\left|n^2 - 2n - 3\right|$ prvočíslem?

(A) 1 (B) 2 (C) 3
(D) 4 (E) nekonečně mnoho

22. Uvnitř čtverce $ABCD$ na obrázku je dána lomená čára $AEFC$. Přitom $AE \perp EF$, $EF \perp FC$, $|AE| = 5$, $|EF| = 1$ a $|FC| = 2$. Určete délku stany čtverce.

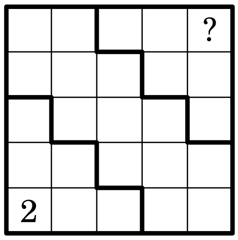


(A) $3\sqrt{2}$ (B) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{11}{2}$
(D) $5\sqrt{2}$ (E) jiná délka

23. První člen posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je $a_1 = 49$. Pro $n \geqq 1$ získáme a_{n+1} tak, že k součtu číslic čísla a_n přičteme 1 a výsledek umocníme na druhou. Tedy například $a_2 = (4 + 9 + 1)^2 = 196$. Určete a_{2019}.

(A) 121 (B) 25 (C) 64 (D) 400 (E) 49

24. Čtvercová tabulka na obrázku je vyplněna tak, že pole každého jejího řádku i každého sloupce obsahují každé z čísel 1, 2, 3, 4 a 5. Přitom součty čísel v každé ze tří tučně ohraničených oblastí jsou stejné a v levém dolním poli je číslo 2. Které číslo se nachází v pravém horním poli?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5