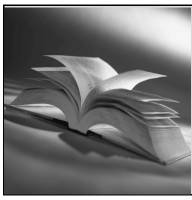
# 1. Úvod do měření



Zopakujte si poznatky získané v rámci předmětu „Úvod do teorie měření“. Přehled těchto poznatků naleznete např. v publikaci: *NOVÁK, R. Úvod do teorie měření (opora). 1. vyd. Ústí nad Labem: PF UJEP, 2003.*

## 1.1 Měření fyzikálních veličin

**Proces fyzikálního měření obvykle rozdělujeme na tři etapy:**

1. Příprava měření,
2. vlastní měření,
3. zpracování výsledků měření.

### 1. Příprava měření

Pozorovatel musí být do podrobností seznámen se všemi úkoly měření, které bude provádět, a také musí dobře ovládat fyzikální problematiku oboru, do něhož měření spadá. Vzhledem k požadované přesnosti měření je nutno rozhodnout, které přístroje se k měření použijí, případně se určí způsob jejich uspořádání. Dále před měřením musí pozorovatel zvážit, které vnější vlivy na ně mohou působit a do jaké míry mohou pozměnit údaje měřících přístrojů (zejména teplota, tlak a vlhkost okolního vzduchu, ale také např. mechanické otřesy, přítomnost různých magnetických polí atp.). Správnost a přesnost měření je dána jednak způsobem, jakým veličiny měříme, jednak přístroji, které k tomu použijeme. Přesnost měření závisí rovněž na zručnosti a zkušenostech pozorovatele, který je provádí. Díky různým klamům a omezené rozpoznávací schopnosti smyslových orgánů lze říci, že měření je tím přesnější, čím více a důsledněji se v jeho průběhu smyslové orgány nahrazují přístroji (podle míry zastoupení použití smyslových orgánů při měření nazýváme měření subjektivním či objektivním).

Použitá měřící metoda závisí na druhu a povaze měřené veličiny. Dále samozřejmě závisí na tom, ze kterých vztahů pro měřenou veličinu vycházíme, které přístroje použijeme a v jakém uspořádání. Měřicí metody rozlišujeme podle různých hledisek:

- **přímé × nepřímé:** přímými metodami měříme veličiny na základě jejich definice, všechny ostatní metody měření nazýváme nepřímými;
- **absolutní × relativní (srovnávací):** metody absolutní poskytují absolutní hodnotu hledané veličiny vyjádřenou v absolutních jednotkách. Relativní

- metody udávají poměr dvou veličin téhož druhu (srovnání s etalonem či standardem);
- **statické × dynamické:** takto jsou měřící metody děleny z hlediska časové změny měřených veličin.

## 2. Vlastní měření

Vlastnímu měření jsou věnovány návody k jednotlivým laboratorním úlohám.

## 3. Zpracování výsledků měření

Zpracování výsledků měření je neméně důležité než měření samotné. V následujícím textu se budeme věnovat zejména chybám měření.

V klasické fyzice předpokládáme, že měřené veličině přísluší jediná „správná“ hodnota, označme ji např. $X$. Opakujeme-li měření téže fyzikální veličiny za (subjektivně) stejných podmínek několikrát za sebou, zpravidla dostáváme různé hodnoty. *Absolutní chybou jednoho měření* (označ. $\Delta X$) budeme rozumět rozdíl mezi správnou hodnotou $X$ a hodnotou $X'$ získanou z měření, tedy je $\Delta X = X - X'$. Pro vyjádření chyby, kterou vztahujeme vůči naměřené veličině, užijeme vztah

$$\delta X = \frac{\Delta X}{X} = 1 - \frac{X'}{X}. \tag{1}$$

Takto definované chybě měření říkáme *relativní chyba* měřené veličiny a nejčastěji ji vyjadřujeme v procentech. Tyto dvě chyby mají rozdílný charakter - absolutní chyba je veličina mající rozměr, kdežto relativní chyba rozměr nemá. Výhoda relativní chyby tedy spočívá v možnosti porovnat přesnost měření fyzikálních veličin s různým rozměrem.

Chyby podle původu můžeme dělit na:

a) *systematické* (často také nazývané *chyby metody*) – zkreslují výsledek určitým způsobem a s jistou pravidelností (původ je nejčastěji v použité metodě a měřícím přístroji nebo v samotném pozorovateli. Tato chyba se dá zjistit, potažmo zcela vyloučit, např. měřením dané veličiny jinou metodou, případně jinými přístroji (popřípadě změnou pozorovatele). Velké neboli hrubé chyby, k nimž dochází nedostatečným soustředěním pozorovatele na měření, se poznají, jestliže měření několikrát opakujeme. Taková měření zcela vypouštíme z dalšího zpracování (viz dále $3\sigma$ interval). Systematické chyby mohou vzniknout i při vyhodnocování výsledků měření (např. při zaokrouhlování)

b) *náhodné* (často také nazývaná *chyby statistické*) – nenesou znaky pravidelnosti, jako tomu je u systematických chyb. Opakujeme-li měření téže veličiny za „týchž“ podmínek několikrát za sebou, zjistíme, že výsledky jednotlivých měření se obecně navzájem poněkud liší, aniž dovedeme udat přesnou příčinu těchto odchylek. Rozptyl výsledků měření souvisí s nejrůznějšími, často těžko postřehnutelnými, změnami uvnitř přístroje i se změnami vnějších podmínek. Těchto navzájem téměř nezávislých vlivů může být velmi mnoho a jejich příspěvek k celkové chybě měření je těžko postižitelný, takže původ náhodných chyb lze vidět skutečně v náhodě. K vyšetřování náhodných chyb je tedy nutno použít metod počtu pravděpodobnosti.

K tomu, abychom ze souboru naměřených hodnot získali informace o skutečné hodnotě naměřené veličiny, je třeba určit velikosti systematické chyby i náhodných chyb. Pro určení náhodných chyb jsou vypracovány přesně určené postupy vycházející přímo z naměřených hodnot (viz dále). Pro určení systematické chyby taková obecná pravidla neexistují, tuto chybu je nutné víceméně odhadnout. Systematické chyby při vyhodnocování můžeme ve fyzikálním praktiku částečně eliminovat např. srovnáním výsledků s údaji v učebnicích, tabulkách apod.

Pomocí metod matematické statistiky a teorie pravděpodobnosti, a za předpokladu, že výsledky fyzikálních měření můžeme považovat za náhodné veličiny (řídí se tzv. normálním zákonem rozdělení) lze ukázat, že „správnou" hodnotu měřené veličiny lze při $n$ provedených měřeních s výsledky $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nejlépe aproximovat *aritmetickým průměrem* naměřených hodnot, tj.

$$\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \,, \tag{2}$$

přičemž míra přiblížení se ke skutečné hodnotě (tj. stupeň aproximace) bude tím větší, čím větší bude $n$. Pro aritmetický průměr platí, že součet tzv. zdánlivých odchylek definovaných vztahem $\Delta a_i = \bar{a} - a_i$ je vždy roven nule, a že součet čtverců odchylek je pro takto zavedenou aproximaci správné hodnoty nejmenší. Dále lze za uvedených předpokladů ukázat, že více než 99,7 % všech naměřených hodnot se při velkém počtu měření nalézá v intervalu $(\bar{a} - 3\sigma, \bar{a} + 3\sigma)$, přičemž veličina

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum\left(\bar{a} - a_i\right)^2}{n-1}} \tag{3}$$

se nazývá *střední kvadratická chyba jednoho měření*. Každý výsledek měření, který přesahuje tento interval, z dalšího zpracování výsledků vypouštíme (pak je ovšem nutno znovu vypočítat aritmetický průměr a chybu měření).

Jiným kritériem k hodnocení přesnosti měření (ovšem závislým na $\sigma$) je tzv. pravděpodobná chyba jednoho měření. Je dána vztahem

$$\vartheta = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\sum\left(\bar{a} - a_i\right)^2}{n-1}} \tag{4}$$

a značí, že pravděpodobnost toho, že při jednom daném konkrétním měření naměřená hodnota „padne" do intervalu $(\bar{a} - \vartheta, \bar{a} + \vartheta)$, je jedna polovina.

Parametry $\sigma$ a $\vartheta$ ovšem hodnotí pouze přesnost výsledku jednotlivého měření. My však výsledek měření aproximujeme aritmetickým průměrem naměřených hodnot, takže pro zhodnocení výsledků budou mít význam parametry charakterizující rozptyl aritmetického průměru.

Ukazuje se, že stačí násobit chyby pro jednotlivá měření faktorem $\frac{1}{\sqrt{n}}$, z čehož plyne vztah pro *střední kvadratickou chybu aritmetického průměru*

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum\left(\overline{a} - a_i\right)^2}{n\left(n-1\right)}} \tag{5}$$

a pro *pravděpodobnou chybu aritmetického průměru*

$$\overline{\vartheta} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\sum\left(\overline{a} - a_i\right)^2}{n\left(n-1\right)}}\,. \tag{6}$$

Pro konkrétní výpočet je často vhodnější zaměnit vzorce pro střední kvadratickou (5) a pravděpodobnou chybu (6), kde se užívá součet čtverců chyb, za vzorce, v nichž se vyskytuje součet prvních mocnin zdánlivých chyb, a to pouze jejich kladných hodnot. Počítáme-li výsledné chyby tímto způsobem, mluvíme o tzv. *metodě kladných odchylek.* Tato metoda má výhodu především v tom, že je vhodnější pro rychlý výpočet. Pro střední kvadratickou a pravděpodobnou chybu aritmetického průměru pak dostaneme vztahy

$$\overline{\sigma} \approx \frac{5}{2}\frac{\sum \Delta a_i^+}{n\sqrt{n-1}} \qquad\qquad \overline{\vartheta} \approx \frac{5}{3}\frac{\sum \Delta a_i^+}{n\sqrt{n-1}}\,, \tag{7}$$

kde $\Delta a_i^+$ jsou kladné hodnoty zdánlivých chyb jednotlivých měření (podrobnější výklad této problematiky naleznete např. v [1] na str. 41).

Chyba aritmetického průměru nám spolu s aritmetickým průměrem poskytuje úplnou informaci o skutečné hodnotě *X*, kterou můžeme získat z naměřeného souboru. Skutečná hodnota měřené veličiny pak leží s pravděpodobností ½ v intervalu:

$$\left(\overline{a} - \overline{\vartheta},\, \overline{a} + \overline{\vartheta}\right).$$

Při zpracování výsledků měření udáváme hodnotu aritmetického průměru $\bar{a}$ jako nejpravděpodobnější hodnotu měřené veličiny $a$ a obvykle střední kvadratickou chybu $\overline{\sigma}$, nebo pravděpodobnou chybou $\overline{\vartheta}$ tohoto průměru. Výsledek pak uvádíme ve tvaru

$$\mathrm{a} = \overline{\mathrm{a}} \pm \overline{\sigma} \qquad \text{či} \qquad \mathrm{a} = \overline{\mathrm{a}} \pm \overline{\vartheta}\,.$$

Výsledkem měření tedy není přesné číslo rovné skutečné hodnotě měřené veličiny, ale interval, v němž skutečná hodnota leží s jistou pravděpodobností.

Při zpracování výsledků měření je často nutné znát pojem *počet platných míst* nějakého čísla. Zaveďme proto pravidla, která tento pojem objasní:

a) První nenulová číslice (zleva) v zápisu daného čísla zaujímá nejvyšší platné místo. V následujících číslech je číslice zaujímající nejvyšší platné místo podtržena: $\underline{1}30{,}05$; $0\underline{9}20$; $0{,}00\underline{8}6$.

b) U čísel s desetinnou čárkou zaujímá poslední udaná číslice (včetně nuly) nejnižší platné místo (tedy např. $123{,}0\underline{5}$; $0{,}003\underline{5}$;$123{,}0\underline{0}$).

c) U čísel bez desetinné čárky zaujímá nejnižší platné místo poslední nenulová číslice (tedy např. $01\underline{2}0$; $1\underline{3}$; $1\underline{3}\ 000$).

d) Počet platných míst nějakého čísla je počet číslic mezi nejvyšším a nejnižším platným místem včetně. Následující čísla mají tedy čtyři platná místa: 1 234; 123 400; 123,4; 1,001; 1,000; 10,10; 0,000 1010;100,0.

*Chybu výsledku zaokrouhlujeme na jedno, nejvýše na dvě platná místa.* Pokud výsledek nepoužíváme k dalším výpočtům, stačí se omezit na jedno platné místo. Pokud s ním provádíme další výpočty, je lepší uvést dvě platná místa, abychom snížili chyby ze zaokrouhlování. Aritmetický průměr pak zaokrouhlíme na číslici téhož řádu, jako je nejnižší platné místo chyby.

***Příklady:***

*a) Správně zapsané výsledky měření*

1. S chybou udanou na jedno platné místo:

$a = (23{,}5 \pm 0{,}6)$ mm   nebo   $a = (2{,}35 \pm 0{,}06).10^{-2}$ m

$T = (327 \pm 4)$ K

$P = (9\ 600 \pm 100)$ W   nebo   $P = (9{,}6 \pm 0{,}1)$ kW

*2. S chybou udanou na dvě platná místa:*

$a = (23{,}49 \pm 0{,}56)$ mm

$T = (327{,}0 \pm 4{,}5)$ K

$P = (9\ 630 \pm 120)$ W

*b) Nesprávně zapsané výsledky měření*

$$r = 0{,}587234810 \pm 0{,}009932871$$

*Oprava:* není zaokrouhlena chyba, není zaokrouhlen aritmetický průměr, není uvedena jednotka.

*Správně má být:*

$r = (0{,}59 \pm 0{,}01)$ cm   nebo   $r = (5{,}9 \pm 0{,}1)$ mm nebo $r = (5{,}9 \pm 0{,}1).10^{-3}$ m.

Máme-li zpracovat sérii $n$ (*přímých*) měření provedených za stejných podmínek a určit celkový výsledek, postupujeme takto:

1. Z naměřených hodnot $a_i$ určíme známým způsobem aritmetický průměr $\bar{a}$ a střední kvadratickou chybu jednoho měření $\sigma$.
2. Vyloučíme hrubé chyby (tj. ta měření, která přesáhnou interval hodnot ($\bar{a} - \sigma$, $\bar{a} + \sigma$), znovu určíme $\bar{a}$ a $\sigma$ (popř. $\vartheta$) a z těchto „nových“ hodnot určíme i $\bar{\sigma}$ (resp. $\bar{\vartheta}$).
3. Hledáme a korigujeme systematické chyby (viz dále).
4. Chybu měření i aritmetický průměr zaokrouhlíme.
5. Výsledek $a$ celého měření (tj. výslednou hodnotu měřené veličiny) zapíšeme ve tvaru:

$$\boxed{a = \bar{a} \pm \bar{\sigma}\ (\bar{\vartheta})}$$

a zpravidla uvádíme i relativní chybu danou podílem užité chyby a průměru.

Pokud hledanou veličinu přímo neměříme, ale vypočítáváme ji z naměřených veličin podle příslušného fyzikálního vztahu, mluvíme o *měření nepřímém*. Poněvadž v měřených veličinách se vyskytují vždy jisté chyby, musí se také hledaná veličina vyznačovat určitou chybou.

Budeme předpokládat, že fyzikální veličina $X$, kterou zjišťujeme, je funkcí $n$ veličin $a$, $b$, $c$, … obsažených v daném vzorci, tj. $X = f(a, b, c, \dots)$. Chyby, s nimiž jsou měřeny veličiny $a, b, c\dots$, označíme $\Delta a$, $\Delta b$, $\Delta c$, …, a budeme je nadále považovat za kladné veličiny; mohou to být jak chyby odhadnuté před měřením, tak střední nebo pravděpodobné chyby měřených veličin apod. V tomto případě je maximální chyba výsledku dána výrazem

$$(\Delta X)_{\max} = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right|\Delta a + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right|\Delta b + \left|\frac{f}{\partial c}\right|\Delta c + \dots \tag{8}$$

*Střední chybu výsledku* pak udává výraz

$$\Delta X = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 (\Delta a)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 (\Delta b)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 (\Delta c)^2 + \dots} \tag{9}$$

Častěji se k ohodnocení přesnosti měření dané veličiny $X$ užívá *střední relativní chyby*, která je dána vztahem

$$\frac{\Delta X}{|X|} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 (\Delta a)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 (\Delta b)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 (\Delta c)^2 + \ldots}}{\left| f(a, b, c, \ldots) \right|} \,. \tag{10}$$

Z uvedeného vyplývá, že v případě nepřímého měření nemá prakticky smysl měřit jednu veličinu mnohem přesněji než druhou. Veličiny vystupující v součtu či rozdílu měříme proto s přibližně stejnou relativní chybou, veličiny vystupující v mocnině se snažíme měřit přesněji, nežli veličiny, které jsou v první mocnině (popř. odmocnině).

Přesnost hledané veličiny *X*, jež je funkcí více měřených veličin *a*, *b*, *c*, …, můžeme hodnotit nejen pomocí maximální chyby a střední relativní chyby, ale též pomocí nám již známé pravděpodobné chyby (X). Podmínkou je, že známe pravděpodobné chyby jednotlivých měřených veličin. Pak se pravděpodobná chyba výsledku, s jakou je určena hledaná veličina $X = f(a, b, c, \ldots)$, dá vyjádřit vzorcem

$$\overline{\vartheta}(X) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \overline{\vartheta}^2(a) + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \overline{\vartheta}^2(b) + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 \overline{\vartheta}^2(c) + \ldots} \tag{11}$$

Při dosazování do tohoto vzorce musíme dbát na to, aby pro každou veličinu pravděpodobná chyba a sama příslušná veličina byly udány ve stejných jednotkách.

*Uveďme nyní chyby pro některé důležité funkce:*

1) Pro funkci *f* dvou proměnných tvaru $f(x,y) = px \pm qy$, kde *p* a *q* jsou nějaké konstanty a *x* a *y* jsou nějaké přímo měřené veličiny s chybami např. $\overline{\vartheta}(x)$ a $\overline{\vartheta}(y)$, jsou parciální derivace rovny $\frac{\partial f}{\partial x} = p$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = \pm q$, a tedy chyba výsledku je dána vztahem

$$\overline{\vartheta}(f) = \sqrt{p^2 \overline{\vartheta}^2(x) + b^2 \overline{\vartheta}^2(y)} \,.$$

Všimněme si, že pro veličinu $f = x - y$, je $\bar{f} = \bar{x} - \bar{y}$ a relativní chyba

$$\delta f = \frac{\sqrt{p^2 \overline{\vartheta}^2(x) + b^2 \overline{\vartheta}^2(y)}}{\bar{x} - \bar{y}} \,,$$

může pro malou hodnotu rozdílu měřených veličin *x*, *y* nabývat značných hodnot. Z toho tedy plyne, že určování rozdílu dvou přibližně stejně velkých veličin může být zatíženo velkou relativní chybou. Proto se takovým metodám, kdy je výsledná veličina určena např. rozdílem dvou veličin, raději vyhýbáme.

2) Je-li veličina (funkce) $f$ dána součinem dvou jiných veličin (značení veličin je stejné jako v bodě 1)

$f = \pm pxy$, pak je $\frac{\partial f}{\partial x} = \pm py$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \pm px$ a $\overline{\vartheta}(f) = \sqrt{p^2 \bar{y}^2 \overline{\vartheta}^2(x) + p^2 \bar{x}^2 \overline{\vartheta}^2(y)}$,

druhá mocnina relativní chyby nám poskytuje pro výpočet „příjemnější“ tvar

$$(\delta f)^2 = \frac{\overline{\vartheta}^2(f)}{\bar{f}^2} = \frac{p^2 \bar{y}^2 \overline{\vartheta}^2(x) + p^2 \bar{x}^2 \overline{\vartheta}^2(y)}{p^2 \bar{x}^2 \bar{y}^2} = (\delta x)^2 + (\delta y)^2 .$$

3) Nechť platí, že $f = \pm p \frac{x}{y}$, z toho $\frac{\partial f}{\partial x} = \pm \frac{p}{y}$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = \mp \frac{px}{y^2}$, a tedy chyba výsledku je

$$\overline{\vartheta}(f) = \sqrt{\frac{p^2}{\bar{y}^2} \overline{\vartheta}^2(x) + \frac{p^2 \bar{x}^2}{\bar{y}^4} \overline{\vartheta}^2}$$

Lze snadno nahlédnout, že druhá mocnina relativní chyby $\delta f$ je vyjádřena stejným jednoduchým výrazem jako ve druhém případě a celkovou chybu výsledku snadno spočítáme násobením $\delta f$ aritmetickým průměrem.

Pro výpočet chyb součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou měřených veličin se $A = a \pm \alpha$, $B = b \pm \beta$ můžeme použít také následujících zjednodušujících vztahů

$$A \pm B = (a \pm b) \pm (\alpha + \beta) \tag{12}$$

$$A \cdot B = ab \pm \left( \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} \right) ab \tag{13}$$

$$A \cdot B = ab \pm \left( \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} \right) ab \tag{14}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b} \pm \left( \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} \right) \frac{a}{b} \tag{15}$$

Pro relativní chybu součinu a podílu tedy platí

$$\delta(A \cdot B) = \delta(A) + \delta(B) \tag{15}$$

$$\delta\left(\frac{A}{B}\right) = \delta(A) + \delta(B) \tag{16}$$

Výsledná absolutní chyba součtu nebo rozdílu dvou měřených veličin je tedy dána součtem jejich absolutních chyb a výsledná relativní chyba součinu nebo podílu těchto veličin je dána součtem jejich relativních chyb.

Bylo by ovšem mylné se domnívat, že chybu měření je možné libovolně zmenšovat se zvyšováním počtu měření. Do chyby výsledků měření je samozřejmě potřeba započítat i *chyby měřidel*. Chyby měření, jimiž jsme se zabývali doposud, charakterizují tedy pouze část chyb měření. Pokud je chyba měřícího přístroje udána výrobcem, je udána tak, že s pravděpodobností blízkou jedné nevybočí naměřené hodnoty z intervalu, který kolem střední hodnoty naměřené veličiny ($\bar{a}$) tato chyba vymezuje. Není-li tato chyba předem známa, pak ji odhadujeme zpravidla hodnotou 1 nebo ½ dílku stupnice (např. u milimetrového měřítka odhadneme chybu na 0,5 až 1 mm). U digitálních stopek měřících s přesností 0,01 s bereme v úvahu i vlastní reakční dobu (0,2 s nebo 0,3 s), spínáme-li je ručně. U posuvného měřítka odhadujeme chybu podle počtu dílků nonia – na 0,1mm, je-li nonius desetidílkový, a na 0,05 mm, je-li nonius dvacetidílkový. Podobně přesnost mikrometru odhadneme na 0,01 mm nebo na 0,005 mm, podle počtu dílků na otočné hlavici.

*Celkovou chybu* $\bar{c}$ měření skládáme tedy z chyby aritmetického průměru vypočtené statistickými metodami (označme ji $\bar{s}$, a z chyby měřidla $\bar{m}$. Je-li $\bar{m} >> \bar{s}$, pak $\bar{s}$ zanedbáme (stačí provést jen malý počet měření), naopak je-li $\bar{m} << \bar{s}$, zanedbáváme $\bar{m}$. Pokud jsou obě chyby $\bar{m}$ a $\bar{s}$ srovnatelné, podílejí se obě tyto chyby na chybě celkové. Ukazuje se, že v praxi zpravidla vyhovuje pro celkovou chybu empirický vztah $\bar{c} = \sqrt{\bar{s}^2 + \bar{m}^2}$, v tomto případě pak tuto chybu nazýváme *střední celkovou chybou*. Výsledek zaokrouhlíme podle uvedených pravidel a zapíšeme ve tvaru

$$\boxed{a = \bar{a} \pm \bar{c}.}$$

Výsledek doplníme ještě chybou relativní.

Je důležité, aby student během celého cvičení přivykal kritickému pohledu na vlastní práci. V laboratoři je vaším úkolem nejen změřit hodnoty zadaných fyzikálních veličin, ale také umět ohodnotit správnost a přesnost naměřených výsledků. Nesoulad mezi naměřenou hodnotou dané fyzikální veličiny a hodnotou tabelovanou nebo obvyklou nemusí být ani neočekávaný ani nežádoucí. Naopak je příležitostí k fyzikálnímu pátrání po možných zdrojích tohoto jevu a k získání dalších experimentálních zkušeností.

## 1.2 Pokyny ke zpracování naměřených hodnot

Při numerických výpočtech nesmíme zapomínat, že naměřené hodnoty veličin jsou pouze přibližná, neúplná čísla, jak bylo uvedeno dříve. Platné cifry daného čísla jsou všechny od první nenulové zleva do poslední zapsané vpravo. Poslední zapsaná cifra je již zatížena chybou měření. Význam tedy mají i pravostranné nuly, protože jimi dáváme najevo, jak přesně bylo provedeno měření.

Zapíšeme-li výsledek měření bez udané chyby, považujeme za chybu jedničku na posledním řádu zapsané číslice. Údaj $d$ = 1,2 m tedy znamená, že měření bylo provedeno s chybou 0,1 m – relativní chyba přibližně 10 %. Naproti tomu tentýž výsledek zapsaný ve tvaru $d = (1{,}200 \pm 0{,}001)$ m, můžeme považovat za velmi přesnou hodnotu (relativní chyba zhruba 0,1 %). Výsledek bez zapsané chyby připouštíme pouze v případě, kdy pro další výpočty postačí řádový odhad chyby.

Chyby uvádíme na jednu platnou cifru a zaokrouhlujeme vždy nahoru. Pouze v případě, kdy by to neúměrně zhoršilo přesnost výsledku, uvedeme chybu na dvě cifry. Vypočítanou chybu $\delta(X) = 3{,}382.10^{-2}$ m zapíšeme tedy $\delta(X) = 4.10^{-2}$ m. Vyjde-li ale chyba například $\delta(X) = 1{,}112.10^{-2}$ m, zapíšeme $\delta(X) = 1{,}1.10^{-2}$ m, neboť zaokrouhlením na $2.10^{-2}$ m bychom chybu prakticky zdvojnásobili.

Výsledek uvádíme na tolik míst, aby poslední zapsaná cifra výsledku byla stejného řádu jako poslední cifra chyby.

***Příklad***

*správně* $d$ = (6,84 0,02) m

*správně* $d$ = (6,84 0,11) m

nesprávně $d$ = (6,843 0,02) m

nesprávně $d$ = (6,8 0,018) m

Pro zápis naměřených i vypočtených hodnot užíváme zásadně mocnin 10, neboť do platných cifer se nepočítají nuly plynoucí z činitele $10^n$. Je-li $U$ = 14 000 V určeno s platností na 3 cifry, musíme údaj zapsat buď 14,0 kV nebo $1{,}40.10^4$ V.

Musíme mít na paměti, zejména při používání kalkulaček (bez zaokrouhlování), že nemůžeme pouhým výpočtem zvyšovat přesnost výsledku. Dosažená přesnost musí odpovídat použitým měřicím přístrojům a metodě měření.

Při sčítání a odečítání se výsledek zaokrouhluje na poslední platné místo toho řádu, který je u všech sčítanců platný.

***Příklad***: 15,6 + 2,35 + 0,093 – 0,155 + 0,3 = 18,188 = 18,2.

Při násobení a dělení je možno u výsledku zapsat nanejvýš tolik platných cifer, kolik má číslo s nejmenším počtem platných cifer.

***Příklad:*** 24,152 . 3,46 = 83,565 92 = 83,6.

Při výpočtech uvedeme pro každý použitý vztah příklad číselného dosazení. Do rovnice dosadíme hodnoty veličin i s příslušnými jednotkami a číselné hodnoty konstant a bez mezivýsledků uvedeme konečný výsledek.

Používáme-li pouze soustavu jednotek SI a předem známe jednotku, v níž vyjde číselná hodnota výsledné veličiny, mohou se do rovnice dosadit číselné hodnoty veličin a jednotka výsledné veličiny se připíše za výraz.

## 1.3 Zhotovování grafů

Grafické zobrazení je díky názornosti velmi časté a v odborné fyzikální literatuře je téměř každá naměřená závislost doplněna grafem. Pro jejich zhotovování nejsou jednoznačná pravidla – v každém oboru jsou trochu odlišné zvyklosti. Ve fyzikálním praktiku doporučujeme držet se následujících zásad:

- Grafy zhotovujeme na milimetrovém papíru – obvykle formátu A4 (není-li určeno jinak). V pravoúhlé soustavě souřadnic se nezávisle proměnná vynáší na vodorovnou osu, přičemž kladné hodnoty veličin vzrůstají vpravo a nahoru od počátku souřadnic.
- Osy grafu musí být popsány symbolem, nebo názvem veličiny. Do hranaté závorky, nebo za lomítko uvedeme i její jednotku (není-li bezrozměrná). Na vnější stranu os vyneseme stupnici, jejíž body jsou přiměřeně daleko od sebe, abychom mohli z grafu pohodlně odečítat. Čísla se píší vodorovně, a to i u svislé osy. Pokud je to účelné, užíváme mocnin 10, popř. násobků jednotek. Souřadnice naměřených bodů na osách nevyznačujeme, ty lze vyhledat v tabulce.
- Měřítka a stupnice grafu volíme tak, aby vynášené křivky zaplňovaly co největší plochu mezi osami. Do průsečíku os klademe nuly stupnic pouze v některých případech (chceme-li např. ukázat, že graf neprochází počátkem souřadnic). Jinak stupnice začíná hodnotou o něco menší než je nejmenší vynášená.
- Jednotlivé vynesené hodnoty v grafu výrazně označíme – nejlépe křížkem. Naprosto nevhodné jsou pouhé tečky, které po vytažení křivky většinou zmizí. Potřebujeme-li do jednoho grafického pole vynést více křivek a mohlo by dojít k záměně bodů, odlišujeme je různými značkami nebo různými barvami (+, ⊗, ⊕). Je-li to vhodné, k vynášeným křivkám zapíšeme hodnotu parametru, který ji určuje.
- Body prokládáme hladkou plynulou křivku. Pokud neužijeme exaktní numerické metody, rýsujeme křivku tak, aby neměla fyzikálně neopodstatněné skoky, zlomy a extrémy, tj. byla dostatečně hladká s přibližně stejným počtem bodů nad a pod čarou.
- Každý graf by měl být doplněn stručným a výstižným názvem, případně dalšími údaji, jakými jsou datum, typ vzorku, parametry a podmínky měření apod.
- Často potřebujeme z grafu odečíst určitou hodnotu, kterou potřebujeme pro další zpracování měření. Tyto vyznačené body označíme odlišně od naměřených hodnot, a to jak na křivce, tak na příslušné ose.

## 1.4 Teoretická příprava na laboratorní cvičení

Má-li laboratorní cvičení splnit svůj účel, je bezpodmínečně nutné, aby studenti docházeli na každé cvičení řádně připraveni. Nedostatečná příprava vede k mechanickému provádění jednotlivých úkolů podle pracovního postupu bez hlubšího pochopení fyzikální podstaty problému a zvyšuje nebezpečí poškození měřících přístrojů.

Nejdůležitější část přípravy je přesná formulace problému, který má být řešen. Musíme si jasně uvědomit, co je *hlavní cíl měření*. V tomto studijním materiálu a další doporučené literatuře je nutné prostudovat příslušnou problematiku tak, abychom získali představu o tom, jaký výsledek měření můžeme očekávat. Do přípravy si zaznamenáme všechny potřebné poznámky a údaje.

Ze základních vztahů vyplyne, které dílčí veličiny mají být změřeny. I když bývá u každé úlohy navržen pracovní postup, předpokládá se, že s hlavními zásadami experimentální práce byl student seznámen v rámci předmětu „Úvod do teorie měření“. Kromě písemné přípravy a znalostí o použité metodě musí student znát rovněž fyzikální zákony, kterými se řídí děje při měření a fyzikální veličiny, které při měření vystupují, včetně jejich jednotek.

Je vhodné připravit si už doma tabulky pro zápis naměřených hodnot. Předem musíme mít představu o přesnosti měření, tedy o maximální přípustné chybě.

Proměřujeme-li fyzikální závislost, je vhodné předem odhadnout interval hodnot měřených veličin a stanovit počet a rozložení měřených bodů. Uvážíme, kterou oblast dané závislosti je nutné případně proměřit hustěji.

Všechny nejasnosti je nutné konzultovat s učitelem předem. Student musí počítat s tím, že jeho příprava do cvičení bude kontrolována. Při nedostatečné přípravě nebude moci absolvovat laboratorní cvičení v řádném termínu. Cvičení si pak musí nahradit v termínu určeném vyučujícím.

Součástí každého úkolu ve fyzikálním měření je úplný a přehledný záznam o měření. Záznam musí být srozumitelný – i po delším čase – nejen pro studenta, který měření prováděl, ale pro každého, kdo bude chtít měření analyzovat nebo v něm pokračovat.

## 1.5 Vypracování protokolu o fyzikálním měření

K získání zápočtu musí student obvykle naměřit určitý počet úloh. Jejich seznam obdrží studenti na začátku semestru. Z každého měření student vypracuje protokol o měření. Protokol musí být odevzdán nejpozději do 14 dnů po měření. Každý protokol je klasifikován. Při klasifikaci se přihlíží k

- připravenosti na měření. Připravenost je zjišťována jednak na základě činnosti studenta, jednak dotazy v průběhu práce, kterými se zjišťuje hloubka pochopení prováděných činností,
- vlastní aktivitě a samostatnosti při práci, zdravé zvídavosti a též k dodržování pracovních pokynů a pravidel bezpečnosti práce,
- obsahové a formální úrovni protokolů.

Nevyhovující protokoly budou vráceny k přepracování, nebo budou hodnoceny známkou „nedostatečný“.

Protokol zpracovávejte na čisté bílé papíry formátu A4. Na první list protokolu umístěte hlavičku, jejíž vzor vám poskytne vedoucí praktik. Tuto hlavičku je nutno úplně a správně vyplnit. Protokol by měl, kromě již uvedené hlavičky, obsahovat tyto části:

**1. Literatura**

Citaci použité literatury uvádějte ve formě, např.: BROŽ, J. a kol. *Základy fyzikálních měření (I)*, 1.vyd. Praha: SPN, 1983;

**2. Úkoly**

Jsou zapsány v návodech poskytnutých k jednotlivým měřením;

**3. Pomůcky použité v úloze**

Uveďte též rozsahy a nejmenší dílky měřících přístrojů, atp.;

**4. Princip měření**

Pište stručně podle návodů, případně podle použité literatury ;

**5. Postup práce**

Pište v bodech, výstižně a stručně;

**6. Zpracování měření**

Dle poskytnutých materiálů, příp. literatury;

**7. Závěr**

Je důležitou částí protokolu, proto mu věnujte vždy dostatečnou pozornost - na základě teoretických vztahů proveďte podrobný rozbor výsledků, chyb a nepřesností, proto mu věnujte vždy dostatečnou pozornost. Na základě teoretických vztahů proveďte podrobný rozbor výsledků, chyb a nepřesností, uveďte vlastní nápady a přístupy k vysvětlení případných nesrovnalostí.

Protokol musí být zpracován čitelně a úhledně! Protokoly si po sobě pečlivě přečtěte, vyvarujete se tím zbytečných chyb. V případě použití výpočetní techniky ke zpracování naměřených hodnot je nezbytné uvádět vztahy, podle kterých se výpočty provádějí (zejména při určování chyb měření). K protokolu nezapomeňte přiložit záznam o měření, který musí být podepsaný vedoucím praktik.