

Pedagogická fakulta v Ústí nad Labem

<u>Fyzikální praktikum k obecné fyzice I</u>	číslo úlohy : 3
Název úlohy: Moment setrvačnosti setrvačnicku	Vypracoval : XXXXXXXXXXXXX email: XXXXXXXX
Vnější podmínky měření : teplota: 23°C Tlak vzduchu:992hPa vlhkost vzduchu : 42%	ročník:1 skupina:Ma-Fy SŠ měřeno dne:26.2.2004
Seznam příloh - počet listů: 5	odevzdáno dne:
Záznam o měření: 1	hodnocení:

Úkol:

1. Zjistit průměrnou hodnotu momentu setrvačnosti setrvačnicku.
2. Vypočítat střední kvadratickou chybu, resp. pravděpodobnou chybu.
3. Vypočítat chybu metody.
4. Odvodit vztah pro výpočet momentu setrvačnosti setrvačnicku.

Pomůcky:

Přístroj Derop, délkové měřidlo, stojan s kladkou, posuvné měřítko, stopky, silonové lanko, závaží. Čas byl měřen stopkami s přesností 0,01s, vzhledem k lidskému faktoru jsme měřili $\Delta t = 0,1s$.

Délková míra byla odečítána z pravítka umístěného vedle dráhy padajícího závaží. Měřítko mělo přesnost 1mm. Opět jsme kvůli lidskému faktoru měřili s chybou $\Delta h = 0,5cm$

Závaží byla zvážena na digitálních vahách. Hmotnosti závaží přesné hmotnosti z nich sestavené jsou uvedeny níže v tabulce.

Poloměry obou řemenic jsme měřili s posuvným měřítkem s přesností 0,1mm. Jelikož ostatní hodnoty jsou s přesností v řádu milimetrů, zaokrouhlili jsme naměřené hodnoty na 1mm.

Princip měření:

Na řemenici setrvačnicku přístroje Derop je navinuto lanko, na jehož konci je zavěšeno závaží hmotnosti m . Uvolníme-li závaží, začne se působením tíže pohybovat rovnoměrně zrychleným pohybem a lanko navinuté na řemenici setrvačnicku bude roztáčet setrvačnick. Za časový interval t urazí závaží dráhu h_1 . Podle zákona zachování energie se musí součet kinetické energie závaží a setrvačnicku rovnat úbytku potenciální energie soustavy:

$$\frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 = mgh_1 \quad /1/$$

kde J je moment setrvačnosti setrvačnicku, ω je úhlová rychlost v čase t , m hmotnost závaží a v jeho postupná rychlost v čase t . Ze vztahu pro dráhu a rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu plyne, že postupná rychlost v v čase t :

$$v = \frac{2h_1}{t} \quad /2/$$

a odpovídající úhlová rychlost

$$\omega = \frac{2h_1}{rt} \quad /3/$$

kde r je poloměr řemenice setrvačnicku přístroje DEROP. Dosazením do rovnice /1/ lze vypočítat moment setrvačnosti setrvačnicku J .

Rovnice /1/ platí ovšem pouze za ideálního předpokladu, že během pohybu setrvačnicku nedochází k žádným energetickým ztrátám. Ve skutečnosti se však část mechanické energie ztrácí třením v ložiskách, odporem vzduchu a prací nutnou k deformaci silonové nitě. Ztráty energie způsobené odporem vzduchu a deformací jsou poměrně malé a můžeme je zanedbat. Síla tření spotřebuje na dráze na dráze h_1 práci

$$A = F \cdot h_1 \quad /4/$$

a zákon zachování energie pak musíme psát:

$$\frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 + F h_1 = mgh_1 \quad /5/$$

Ztráta mechanické energie se projeví tím, že závaží po dosažení nejnižší polohy se již nevrací do původní výšky h_1 , ale jeho maximální výška bude h_2 . Úbytek potenciální energie způsobila práce třecí síly:

$$mg(h_1 - h_2) = F(h_1 + h_2) \quad /6/$$

Dosazením do rovnice /5/ pak pro moment setrvačnosti dostáváme:

$$J = mr^2 \left(gt^2 \frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)} - 1 \right) \quad /7/$$

Postupné odvození:

$$F = \frac{mg(h_1 - h_2)}{h_1 + h_2}, \quad \omega = \frac{2h_1}{rt}, \quad v = \frac{2h_1}{t}$$

$$\frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 + F h_1 = mgh_1$$

$$\frac{1}{2} J \left(\frac{2h_1}{rt}\right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{2h_1}{t}\right)^2 + \frac{mg(h_1 - h_2)}{h_1 + h_2} h_1 = mgh_1$$

$$2Jh_1 \left(\frac{1}{rt}\right)^2 + 2mh_1 \left(\frac{1}{t}\right)^2 + \frac{mg(h_1 - h_2)}{h_1 + h_2} = mg$$

$$J = \frac{mg}{2h_1} r^2 t^2 - \frac{2mh_1}{2h_1} \left(\frac{rt}{t}\right)^2 - \frac{mg(h_1 - h_2)}{2h_1(h_1 + h_2)} r^2 t^2$$

$$J = mr^2 \left(gt^2 \left(\frac{1}{2h_1} - \frac{h_1 - h_2}{2h_1(h_1 + h_2)} \right) - 1 \right) = mr^2 \left(gt^2 \frac{h_1 + h_2 - h_1 + h_2}{2h_1(h_1 + h_2)} - 1 \right)$$

$$J = mr^2 \left(gt^2 \frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)} - 1 \right)$$

Postup měření:

1. Seřídili jsme polohu závaží setrvačnicku a nechali zkontrolovat.
2. Pomocí přístroje DEROP jsme zjistili hmotnosti m používaných závaží.
3. Na silonové lanko jsme zavěsili závaží m a označili nejnižší polohu závaží A.
4. Otáčením setrvačnicku jsme navinuli lanko na řemenici setrvačnicku tak, že závaží vystoupilo do výšky h_1 nad značku A. Tuto výšku jsme určili přesně podle délkového měřidla.
5. Stopkami jsme změřili dobu t potřebnou k tomu, aby závaží proběhlo dráhu h_1 .
6. Setrvačností se setrvačnick otáčel dále a závaží opět stoupalo. Označili jsme tedy nejvyšší polohu, kterou závaží setrvačností dosáhlo. Tato vzdálenost od bodu A je výška h_2 .
7. Změřili jsme poloměr řemenice setrvačnicku.
8. Dosazením do rovnice /7/ jsme vypočítali moment setrvačnosti.
9. Výsledky měření jsme sestavili do tabulky.

Zpracování měření:

A = 26 cm, $h_1 + A = 90$ cm ($h_1 = 0,64$ m)

- pro menší řemenici o poloměru $r = 0,02$ m byly naměřeny tyto hodnoty:

hmotnost (kg)	0,2052	0,2052	0,2566	0,2566	0,3058	0,3058	0,3572	0,3572	0,4069	0,4069
čas (s)	29	28,1	25,8	25,6	23,9	24,1	22,4	22,4	21,5	21,1
$h_2 + A$ (cm)	75	74,5	76	76,5	77	77	78	78,5	78,5	78,5
h_2 (m)	0,49	0,485	0,5	0,505	0,51	0,51	0,52	0,525	0,525	0,525
J (kg.m ²)	0,4656	0,4346	0,4661	0,4615	0,4819	0,4901	0,4999	0,5025	0,5274	0,5079

A = 34 cm, $h_1 + A = 90$ cm ($h_1 = 0,56$ m)

- pro větší řemenici o poloměru $R = 0,04$ m byly naměřeny tyto hodnoty:

hmotnost (kg)	0,2052	0,2052	0,2566	0,2566	0,3058	0,3058	0,3572	0,3572	0,4069	0,4069
čas (s)	13,6	14	12,8	12,3	12,2	11,2	10,2	10,1	9,9	9,8
$h_2 + A$ (cm)	82	82,5	83,5	83	83,5	83	84,5	84,5	84	84,5
h_2 (m)	0,48	0,485	0,495	0,49	0,495	0,49	0,505	0,505	0,5	0,505
J (kg.m ²)	0,4882	0,5174	0,5497	0,5048	0,5951	0,4988	0,4909	0,4813	0,5239	0,5161

- průměrná hodnota momentu setrvačnosti setrvačnicku je:

$$\bar{J}_c = \frac{1}{n} \sum J_i',$$

$$\bar{J}_c = \frac{1}{20} (0,4656+0,4346+0,4661+0,4615+0,4819+0,4901+0,4999+0,5025+0,5274+0,5079+0,4882 + 0,5174+0,5497+0,5048+0,5951+0,4988+0,4909+0,4813+0,5239+0,5161)$$

$$\bar{J}_c = 0,5002 \text{ kg m}^2$$

střední kvadratická chyba jednoho měření σ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (J_c - J_i)^2}{n-1}}, \quad \bar{J}_c = \frac{1}{n} \sum J_i'$$

$$\sigma = 0,03568 \text{ kg m}^2$$

střední kvadratická chyba aritmetického průměru $\bar{\sigma}$:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{\sigma} = \frac{0,03568}{\sqrt{10}} = 0,0112 \text{ kg m}^2$$

Maximální chyba metody (pro malou řemenici a první měření hmotnosti 30g) :

$$\begin{aligned} \Delta J_{\max} &= \frac{\partial J}{\partial m} \Delta m + \frac{\partial J}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial J}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial J}{\partial h_1} \Delta h_1 + \frac{\partial J}{\partial h_2} \Delta h_2 = \left| r^2 \left(gt^2 \frac{h_2}{h_1(h_1+h_2)} - 1 \right) \right| \Delta m + \\ &+ \left| 2mr \left(gt^2 \frac{h_2}{h_1(h_1+h_2)} - 1 \right) \right| \Delta r + \left| \frac{2tgm r^2 h_2}{h_1(h_1+h_2)} \right| \Delta t + \left| -\frac{gh_2 m r^2 t^2 (2h_1+h_2)}{(h_1(h_1+h_2))^2} \right| \Delta h_1 + \left| \frac{gmr^2 t^2}{(h_1+h_2)^2} \right| \Delta h_2 = \\ &= 1,5528 \cdot 0,0001 + 47,4835 \cdot 0,0002 + 0,0398 \cdot 0,2 + 1,1551 \cdot 0,005 + 0,5183 \cdot 0,005 = 0,026 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

$$\delta J_{\max} = \frac{\Delta J_{\max}}{\bar{J}} \cdot 100 = 5,2\%$$

Závěr:

Měřením a následnými výpočty jsme zjistili, že velikost momentu setrvačnosti setrvačnicku je $J = (0,50 \pm 0,01) \text{ kg m}^2$

Hodnoty, uvedené v tabulkách, ukazují, že závaží s větší hmotností sestupují za kratší dobu a vystupují výše, než závaží o menší hmotnosti. Hodnoty momentu setrvačnosti setrvačnicku se ve všech naměřených případech blíží k $J = 0,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ z čehož vyplývá, že nezáleží na tom, jakou řemenici jsme použili, ani na hmotnosti závaží.

Literatura:

J.Brož: Základy fyzikálních měření

A.Hlavička: Fyzika pro pedagogické fakulty