Zpracování měření - kuchařka

Získání použitelných dat

- Před započetím vlastního sběru dat je vhodné provést „rekognoskaci terénu“ (jde-li to), a zjistit, zda je vůbec možné získat nějaké měřitelné hodnoty, popř. ve které oblasti. (Zjišťujeme-li např. VA charakteristiky diody, je vhodné zjistit maximální přípustné napětí a proud na diodě, a ty nepřekročit).
- Při měření je třeba přemýšlet. Je třeba odhadnout, ve které oblasti získávat data tak, aby dala použitelné výsledky. (Říká-li návod „proveďte deset měření v rozsahu 0 až 50 V“, přičemž se něco děje pouze v oblasti 3 - 7 V, je jasné, že deset „povinných“ měření je třeba provádět právě v té oblasti.)
- Již v průběhu měření je třeba konzultovat naměřené hodnoty s teoretickými závěry, nebo alespoň se zdravým rozumem. Vychází-li např. hustota ocelového válce 300 kg/m^3, je jasné, že je něco v nepořádku.

Zápis použitelných dat

Data by měla být zapisována do přehledných tabulek. K naměřeným datům by měly být poznamenány jednotky, ve kterých bylo měřeno, na jaký rozsah byl nastaven měřící přístroj a jaká je jeho přesnost. U elektronických obvodů je nanejvýše vhodné připsat si hodnoty skutečně používaných komponent. Při pozdějším zpracování není většinou již možnost tyto údaje získat.

List s naměřenými údaji by měl obsahovat: datum měření, název měřené úlohy, podmínky měření (teplota, tlak, vlhkost) a jednotlivé tabulky by měly být srozumitelně popsány.

Zpracování naměřených hodnot

Při jednom měření odpovídá chyba měření chybě měřidla. (předpokládáme pečlivou a bezchybnou práci experimentátora).

Při více měřeních je chyba určena jednak chybou měřidla, ale také chybou způsobenou náhodnými procesy při měření. Pak je třeba určit **průměrnou hodnotu** $\overline{x}$ měřené veličiny a **směrodatnou odchylku** $\sigma(x)$ [1]. Obvykle se pracuje se **směrodatnou odchylkou aritmetického průměru** $\sigma(\overline{x})$ [2]. Uvádím příslušné vztahy:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \, , \; \sigma(\overline{x}) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - x_i)^2}{n(n-1)}}$$

Příklad

Desetkrát jsem vážil jeden a tentýž kámen na kuchyňských vahách. Vím, že kuchyňské váhy váží s chybou ±1 g. Naměřené hodnoty uvádím v tabulce.

Z naměřených dat určím průměrnou hmotnost a směrodatnou odchylku. Dostávám hodnoty: $\overline{m}$ = 42,2 g, $\sigma(m)$ = 9,9 g, $\sigma(\overline{m})$ = 3,1 g.

n	m (g)	n	m (g)
1	45,6	6	44,9
2	45,4	7	12,6
3	44,8	8	46,1
4	46,0	9	45,7
5	45,7	10	45,6

[1] Z důvodů nemožnosti použít řecké symboly se směrodatná odchylka někdy také značí jako s(x).

[2] Uvádím oba dva vztahy, protože většina kalkulaček umožňuje automaticky spočítat pouze směrodatnou odchylku, zatímco zde pracujeme se směrodatnou odchylkou aritmet. průměru.

Vyloučení hrubých chyb

Po měření je vhodné si projít naměřené hodnoty a vyloučit hrubé chyby. Hrubá chyba je (laicky řečeno) hodnota, která se výrazně liší od ostatních . Pro určení hrubých chyb se obvykle používá tzv. **3s kritérium**. Hrubá chyba je ta hodnota, která se nevejde do intervalu $(\overline{m}-3\sigma(m),\overline{m}+3\sigma(m))$. 3s kritérium bohužel nelze při malém počtu měření použít, takže určení hrubých chyb většinou závisí na vašem odhadu.

V předchozím příkladu velmi vybočuje z ostatních naměřených hodnota hodnota č. 7. Je proto lépe ji označit jako hrubou chybu a nadále s ní vůbec nepočítat. Průměr a odchylku určíme ze zbylých devíti hodnot, čímž získáme přesnější odhad průměrné hmotnosti i menší směrodatnou odchylku:
m = 45,5 g, $\sigma(\overline{m})$ = 0,4 g.

Určení úplné chyby

Chyba měření získaná z měření mnoha hodnot je dána vzorcem pro směrodatnou odchylku $\sigma(\overline{m})$ = 0,4 g. Každé jednotlivé měření je ale zatíženo chybou danou nepřesností vah $m(m)$ =1 g. Tuto skutečnost zohledňuje **úplná chyba měření**. Pro určení úplné chyby měření slouží vztah $e(m)=\sqrt{\sigma(m)^2+m(m)^2}$.
Výslednou takto určenou chybu zaokrouhlíme na jednu, maximálně dvě platné cifry, výsledek poté zaokrouhlíme na stejný počet desetinných míst.

Hmotnost kamene z příkladu je pomocí výše uvedeného postupu určena jako m = (45,5±1,1) g.

Nepřímá měření

Často některou veličinu nelze měřit přímo. Pomocí známého vztahu ji ale dokážeme vypočítat z jiných, přímo měřených veličin. Například elektrický odpor R se přímo měří poměrně obtížně. Pomocí Ohmova zákona jej ale lze vypočítat z přímo naměřeného napětí a proudu protékajícího vodičem.

Chyby nepřímého měření

Pro práci s chybami platí, že **žádnou matematickou operací nemohu zmenšit chybu.** Podrobnější úvahou dojdeme k následujícím závěrům: Při sčítání či odčítání měřených veličin je chyba výsledku součtem absolutních chyb. Při násobení a dělení měřených veličin je relativní chyba výsledku rovna součtu relativních chyb.

Obecný postup určení chyby nepřímého měření:

Vztah určující hledanou veličinu se parciálně derivuje podle všech měřených veličin. Celková chyba je dána součtem abs. hodnot jednotlivých derivací (po dosazení hodnot). Celková maximální chyba nepřímo měřené veličiny x = x(x_1,x_2,..,x_n) je určena vztahem: $e(x)=\left|\frac{\partial x}{\partial x_1}\right|e(x_1)+\left|\frac{\partial x}{\partial x_2}\right|e(x_2)+\ldots+\left|\frac{\partial x}{\partial x_n}\right|e(x_n)$

Příklad:

Zjišťuji hustotu kovovéhoválečku, jehož poloměr, výšku a hmotnost jsem změřil přímo. Objem a hustotu určím výpočtem. Vím, že: m = (137,60±0,01) g, r = (12,0±0,1) mm a h = (25,4±0,1) mm. Hustotu válečku určuji podle vztahu $\rho=\frac{m}{V}=\frac{m}{\pi r^2 h}$. Po dosazení dostávám $\rho=\left(\frac{137,60\cdot 10^{-3}}{\pi\cdot\left(12\cdot 10^{-3}\right)^2\cdot 25,4\cdot 10^{-3}}\right)$ kg·m^{-3}.

Určení chyby

Přímo měřené veličiny jsou m, r, h, takže vztah pro celkovou chybu má tvar
$e(\rho)=\left|\frac{\partial\rho}{\partial m}\right|e(m)+\left|\frac{\partial\rho}{\partial r}\right|e(r)+\left|\frac{\partial\rho}{\partial h}\right|e(h)$. Hodnotu π mohu vzhledem k přesnosti měření považovat za známou přesně[3].

Po dosazení chyb měřidel a derivování dostávám:

$$e(\rho)=\left(\frac{1}{\pi r^2 h}\cdot 10^{-5}+\frac{2m}{\pi r^3 h}\cdot 10^{-4}+\frac{m}{\pi r^2 h^2}\cdot 10^{-4}\right)kg.m^{-3}$$

Celková chyba určení hustoty je tedy

$$e(\rho)=\left(\frac{1}{\pi\cdot\left(12\cdot 10^{-3}\right)^2\cdot 25,4\cdot 10^{-3}}\cdot 10^{-5}+\frac{2\cdot 137,6\cdot 10^{-3}}{\pi\cdot\left(12\cdot 10^{-3}\right)^3\cdot 25,4\cdot 10^{-3}}\cdot 10^{-4}+\frac{137,6\cdot 10^{-3}}{\pi\cdot\left(12\cdot 10^{-3}\right)^2\cdot\left(25,4\cdot 10^{-3}\right)^2}\cdot 10^{-4}\right)\mathrm{kg}\cdot m^{-3}$$

Hustota válečku je tedy $\left(11974{,}9\pm 247{,}6\right)$ kg.m^{-3}.

Postup – shrnutí:

1. Pečlivě a přesně měřím potřebné hodnoty, zapisuji do přehledné tabulky, poznamenávám si jednotky, přesnost měření jakož i všechny další relevantní údaje.
2. naměřené hodnoty statisticky zpracuji
3. Ze zjištěných chyb měření a známých chyb měřidla určím úplnou chybu naměřených hodnot
4. V případě, že zjišťuji hodnou určenou výpočtem z naměřených veličin, určím celkovou maximální chybu nepřímého měření.

[3] To není tak úplně pravda, ale pro jednoduchost se s tím v daný okamžik spokojíme, zvláště, používáme-li „kalkulačkovou“ hodnotu π určenou na 10 platných míst.