

Řešte v \mathbb{R} nerovnici:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{2}$$

$$O = D = \mathbb{R}$$

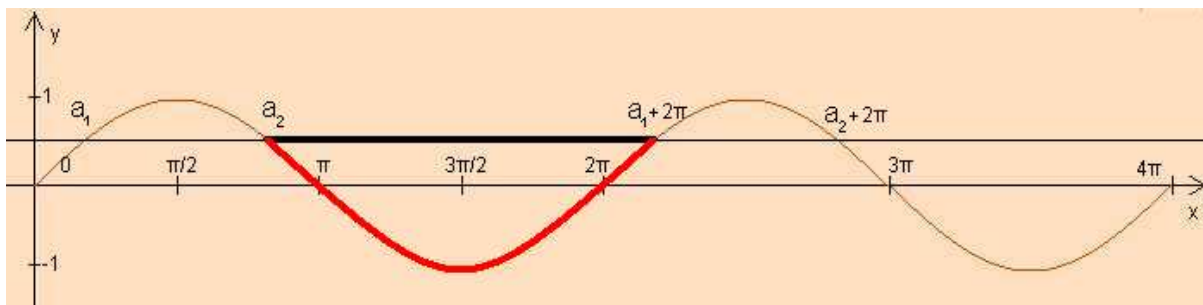
Podobně jako tomu bylo u rovnic i zde je třeba nejprve zavést substituci:

$$a = x + \frac{\pi}{4}$$

S ní se úloha převádí na otázku:

Jaké je řešení nerovnice $\sin a \leq \frac{1}{2}$ (podobný úkol jsme již řešili v úloze 6.1)

K řešení nám pomůže graf funkce sinus:



Přímka $y = \frac{1}{2}$ nám na sinusoidě vyznačila body, pro které $\sin a = \frac{1}{2}$, ty další, pro které je $\sin a < \frac{1}{2}$, potom leží pod touto přímkou. (Hledané hodnoty a jsou zvýrazněny červenou barvou.)

Je tedy třeba najít krajní body daného intervalu, které jsou řešením rovnice $\sin a = \frac{1}{2}$:

$$a_1 = \frac{\pi}{6} \text{ a protože funkce sinus je kladná ještě ve II. kvadrantu } a_2 = \frac{5\pi}{6}$$

Podíváme-li se opět na graf, hledaný interval se nenachází na intervalu (a_1, a_2) –

(to by bylo řešení v případě $\sin a > \frac{1}{2}$),

ale naše řešení leží na intervalu $\langle a_2, a_1 + 2\pi \rangle$.

Tedy:

$$a_2 = \frac{5\pi}{6}$$

a připsíme periodu:

$$a_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$a_3 = a_1 + 2\pi = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$$

$$a_3 = \frac{13\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vraťme se zpět k substituci:

$$x_2 + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

a

$$x_3 + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$$

$$x_3 = \frac{23\pi}{12} + 2k\pi$$

A nakonec zapíšeme množinu kořenů: $K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle \frac{7\pi}{12} + 2k\pi; \frac{23\pi}{12} + 2k\pi \right\rangle$