

GYMNÁZIUM RUMBURK



SBÍRKA

**MATURITNÍCH ÚLOH
Z
MATEMATIKY**

(platná od 2023/24)

Úlohy označené * jsou určeny studentům matematicko-technického a přírodovědného bloku.

Maturitní témata

- 1) Početní řešení trojúhelníků
- 2) Obvody a obsahy rovinných útvarů
- 3) Konstrukční úlohy
- 4) Úpravy algebraických a číselných výrazů
- 5) Lineární a kvadratické rovnice a nerovnice
- 6) Soustavy rovnic a nerovnic
- 7) Rovnice s neznámou pod odmocninou, rovnice a nerovnice s neznámou ve jmenovateli
- 8) Exponenciální a logaritmické rovnice
- 9) Goniometrické rovnice
- 10) Funkce kvadratická, nepřímá úměrnost a lineární lomená
- 11) Mocninné funkce a jejich inverze
- 12) Exponenciální a logaritmické funkce
- 13) Goniometrické funkce a výrazy
- 14) Absolutní hodnota
- 15) Operace s vektory
- 16) Analytická vyjádření lineárních útvarů
- 17) Analytická geometrie rovinných obrazců
- 18) Kuželosečky
- 19) Přímka a kuželosečka
- 20) Stereometrie – polohové úlohy, řezy
- 21) Stereometrie – metrické úlohy
- 22) Povrchy a objemy těles
- 23) Matematická logika
- 24) Posloupnosti
- 25) Kombinatorika a pravděpodobnost

1) Početní řešení trojúhelníků

(Pythagorova věta, Euklidovy věty, sinová a kosinová věta, goniometrické funkce ostrého úhlu v pravoúhlém trojúhelníku)

1. Vypočítejte zbývající prvky (a , b , c , c_a , c_b , v , α , β) v pravoúhlém ΔABC (s pravým úhlem při vrcholu C), je-li dáno: a) $c = 10$ cm, $c_a = 7$ cm
b) $b = 5$ cm, $c = 13$ cm
c) $a = 5$ cm, $\alpha = 30^\circ$.
2. Určete délky všech stran a velikosti všech vnitřních úhlů ΔABC , je-li dáno:
a) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 6$ cm
b) $a = 10$ cm, $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 52^\circ$
c) $b = 8$ cm, $a = 5$ cm, $\alpha = 26^\circ 55'$.
3. Je dán ΔABC , ve kterém $b = 12$ cm, $c = 9$ cm, $t_b = 7,5$ cm. Vypočítejte: a) velikost α , b) délku a .
4. Dopočítejte zbývající strany v pravoúhlém ΔABC s přeponou c , v němž $t_a = 13$ cm, $a = 10$ cm.
5. V rovnostranném ΔABC vyjádřete v (výšku), r , ρ (poloměry kružnice opsané a vepsané) v závislosti na délce strany a .
6. Vypočítejte délky úhlopříček v rovnoběžníku ABCD, ve kterém $a = 25$ cm, $b = 16$ cm, $\beta = 60^\circ$.
- 7*. Odvoďte vztah mezi délkou strany a a poloměrem ρ kružnice vepsané a délkou strany a a poloměrem r kružnice opsané v pravidelném n -úhelníku.
- 8*. V pravoúhlém ΔABC mají odvěsny délky 12 cm a 16 cm. Určete poloměry r a ρ kružnice opsané a vepsané danému trojúhelníku.

2) Obvody a obsahy rovinných útvarů

(vztahy pro obvody a obsahy obrazců)

1. V ΔABC platí: $c = 8$ cm, $b = 5$ cm, $\alpha = 30^\circ$. Vypočítejte obsah ΔABC a jeho výšky v_a , v_b , v_c .
2. Vypočítejte obsah rovnoramenného lichoběžníku se základnami délek 13 cm a 7 cm a rameny délky 5 cm.
3. Vypočítejte délku strany, obvod a obsah pravidelného 5-úhelníku, který je vepsán do kružnice o poloměru $r = 4$ cm.
4. Vypočítejte obsah trojúhelníku se stranami délek 4 cm, 5 cm a 7 cm.
5. Vypočítejte obsah rovnoramenného Δ se základnou 6 cm a úhlem při základně 30° .
6. Určete délky stran obdélníku, je-li jeho obsah 54 cm² a obvod 30 cm.
7. Obvod kruhové výseče, která je částí kruhu o poloměru 10 cm, je 35 cm. Vypočítejte její obsah.
- 8*. Určete obsah pravoúhlého lichoběžníku se základnami délek 33 cm a 9 cm, je-li kosé rameno o 18 cm delší, než kolmé rameno.
- 9*. Vzdálenost tětiny od středu kružnice je 4 cm, příslušný středový úhel má velikost 120° . Vypočítejte obvod a obsah kruhové výseče s příslušným středovým úhlem.
- 10*. Vypočítejte obsah mezikruží omezeného kružnicí opsanou a vepsanou rovnostrannému ΔABC se stranou $a = 4$ cm.

11*. Vypočítejte obsah rovinného obrazce, který je omezen:

a) grafem funkce $f: y = x^2 - 2x + 2$ a osou x v intervalu $\langle 0; 3 \rangle$

b) grafy funkcí $f: y = -x^2 + 2x + 3$ a $g: y = x + 1$

3) Konstrukční úlohy

(základní prvky trojúhelníků a čtyřúhelníků a jejich vlastnosti, typy a struktura konstrukčních úloh, zobrazení a jejich užití, konstrukce na základě výpočtu, tečny ke kružnici)

1. Sestrojte všechny ΔABC , pro které platí:

a) $c = 7$ cm, $v_a = 6,5$ cm, $\alpha = 30^\circ$

b) $c = 4$ cm, $b = 3,5$ cm, $t_a = 3$ cm

c) $\gamma = 75^\circ$, $v_a = 3,5$ cm, $r = 2,5$ cm (poloměr kružnice opsané)

2. Je dána úsečka CC_1 , $|CC_1| = 5$ cm. Sestrojte všechny ΔABC , pro které platí $\beta = 60^\circ$, $c = 4$ cm a

a) CC_1 je v ΔABC výškou v_c

b) CC_1 je v ΔABC těžnicí t_c

3. Sestrojte: a) kosočtverec $ABCD$, kde $e = |AC| = 7$ cm a $v = 5$ cm

b) čtyřúhelník $ABCD$, kde $|BC| = 5,5$ cm, $|AC| = 6$ cm, $|CD| = 4,5$ cm, $|\sphericalangle ADC| = 90^\circ$, $|\sphericalangle BAC| = 50^\circ$

4. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, se základnami AB , CD , pro který platí:

a) jsou dány všechny jeho strany

b) $a = 6$ cm, $\alpha = 60^\circ$, $v = 3,5$ cm, $b = 4$ cm

5*. Sestrojte ΔABC , pro který platí: a) $a : b = 2 : 3$, $\gamma = 50^\circ$, $v_c = 5$ cm

b) $a : b : c = 7 : 4 : 5$, $v_b = 4$ cm

6. Je dán libovolný ΔKLM a bod S ležící vně Δ . Sestrojte $\Delta K'L'M'$, pro který platí:

a) $R(S; -70^\circ): \Delta KLM \rightarrow \Delta K'L'M'$

b) $H(S; -2/3): \Delta KLM \rightarrow \Delta K'L'M'$

7. Sestrojte úsečky délek:

$\sqrt{8}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$

8. Úsečku AB o velikosti 7 cm rozdělte:

a) bodem X na dvě části tak, aby platilo $|AB| : |AX| = 4 : 3$

b) body K a L tak, aby platilo $|AK| : |KL| : |LB| = 3 : 1 : 2$

9. Je dána kružnice $k(O; 3$ cm) a bod M , $|OM| = 5$ cm. Sestrojte všechny tečny z bodu M ke kružnici k .

10*. Sestrojte společné tečny kružnic $k(S_1; 4$ cm) a $l(S_2; 2$ cm), kde $|S_1S_2| = 7$ cm.

4) Úpravy algebraických a číselných výrazů

(mnohočleny – početní operace, rozklad na součin, lomené výrazy – úpravy, definiční obor, výrazy s mocninami a odmocninami – úpravy, usměrňování zlomků; *komplexní čísla – početní operace s čísly v algebraickém a goniometrickém tvaru)

1. Vydělte a určete, kdy má dělení smysl:

a) $(8x^3 - 10x^2 - 13x + 15) : (2x - 3)$

b) $(5x^5 + 7x^4 - 20x^3 - 11x^2 + 23x - 6) : (x^2 + x - 3)$

c) $(1 - 8x^2 - 4x^3 + 3x^4 - 4x^5 + 12x^6) : (x^2 + 1)$

d) $(x^4 - x^3 + 2x^2 + 3) : (x^2 - x + 1)$

2. Rozložte na součin (maximálně):

a) $ax^2 - bx^2 + bx - ax$

d) $2a^5 - 2a$

g) $x^6 - y^6$

j) $x^2 - x - 6$

b) $a^5 - a^3 + a^2 - 1$

e) $2a^4 - 2a$

h) $16x^2 - 25$

k) $4x^2 + 4x + 1$

c) $xz - yz - x^2 + 2xy - y^2$

f) $27r^4 + r$

i) $15x^2 - 30x$

l) $-x^2 + 7x + 8$

3. Zjednodušte a určete podmínky:

a) $\frac{m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3}{m^2 + 2mn + n^2}$

e) $\frac{x^3 - xy^2}{4x^2 - 8xy + 4y^2}$

b) $\frac{x^2 - x - 30}{36 - x^2}$

f) $\frac{4z^2 + 4z - 24}{z^4 - 9z^2}$

c) $\frac{3uv + 9v - 2u - 6}{3uv - 2u - 9v + 6}$

g) $\frac{a^2 + b^2 - c^2 - 2ab}{a^2 - b^2 + c^2 - 2ac}$

d) $\frac{3a^3 + ab^2 - 6a^2b - 2b^3}{9a^5 - ab^4 - 18a^4b + 2b^5}$

h) $\frac{r^5 - r^3s^2 - r^2s^3 + s^5}{r^3 + 2r^2s + 2rs^2 + s^3}$

4. Proveďte a určete podmínky:

a) $\frac{2m-n}{m-n} + \frac{m}{n-m}$

b) $\frac{3}{a-1} - \frac{3}{a^2-a}$

c) $\frac{3+2x}{2-x} - \frac{2-3x}{2+x} + \frac{x(16-x)}{x^2-4}$

d) $\frac{1-x^2}{x^3-1} \cdot \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$

e) $\left(\frac{1}{n-1} - \frac{3}{n^3-1} - \frac{3}{n^2+n+1} \right) \cdot \left(n + \frac{2n+1}{n-1} \right)$

f) $\left(1 - \frac{x^2}{x^2-1} \right) : \left(\frac{x+2}{x+1} - 1 \right)$

g) $\left[\left(\frac{s}{r-s} + \frac{r}{r+s} \right) \cdot \left(\frac{r^2}{s^2} + \frac{s^2}{r^2} - 2 \right) \right] : \frac{r^4 - s^4}{r^2s^2}$

h) $\frac{x - \frac{4}{x}}{\frac{4}{x} + 2}$

i) $1 + \frac{2}{1 - \frac{2}{1 + \frac{2}{x}}}$

5. Zjednodušte pro přípustné hodnoty proměnných:

a) $\sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}}$

b) $5^{\sqrt{3}} \cdot 5^{1-\sqrt{3}}$

c) $(2^{\sqrt{3}-\sqrt{5}})^{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

d) $\left(2\frac{1}{2} \right)^6 \cdot \left(\frac{2^{-1}}{5} \right)^4$

e) $\left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{-3} \right]^2$

f) $\frac{a^3}{2^2} - \left(\frac{2}{a} \right)^{-3}$

g) $\sqrt{2a^3} \cdot \sqrt{18a}$

h) $(a^2b)^3 \cdot (ab^3)^{-3}$

i) $\left[x^3 \cdot \left(\frac{3}{x} \right)^4 \cdot \left(\frac{x^2}{9} \right)^{-3} \cdot \frac{1}{81} \right]^{-1}$

6. Usměrněte zlomky: a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ c) $\frac{8}{3-\sqrt{5}}$

7. Částečně odmocněte: $\sqrt{12}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt[3]{54}$, $\sqrt{200}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt{147}$, $\sqrt[3]{128}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{80}$, $\sqrt{98}$

8*. Určete, pro které hodnoty proměnné nabývá výraz celočíselných hodnot:

a) $\left(\frac{y+1}{y^2+1-2y} + \frac{1}{y-1} \right) : \frac{y}{y-1}$

b) $\left(\frac{1}{z+1} - \frac{2z}{z^2-1} \right) \cdot \left(\frac{1}{z} - 1 \right) + \frac{3z-1}{z^2+z}$

9*. Vypočítejte a výsledek zapište v algebraickém tvaru:

a) $(3+2i)(5-3i)$

b) $(i^2)^8 - i^{13}$

c) $3(\sin 30^\circ + i \cos 30^\circ) \cdot 6(\sin 60^\circ + i \cos 60^\circ)$

d) $\frac{3+2i}{6-5i}$

5) Lineární a kvadratické rovnice a nerovnice

(úpravy a obory rovnic, typy kvadratických rovnic a metody řešení, úpravy a metody řešení nerovnic, rovnice s parametrem, rovnice řešené substitucí, vyjádření neznámé ze vzorce; *rovnice s parametrem)

1. Řešte v R: a) $\frac{3+2x}{2} - \left(\frac{7}{6} - \frac{12x-1}{3}\right) = 5x$ b) $\frac{3x-1}{3} - (x-1) = \frac{3x-2}{6} - \frac{x}{2}$

c) $\frac{3-x}{2} - \left(\frac{7-x}{3} - \frac{x+3}{4}\right) + \frac{7-x}{6} - \frac{9+7x}{8} + x = 0$

2. Řešte v R: a) $x^2 - 11x + 30 = 0$ e) $12x^2 - 17x + 7 = 0$ i) $-2x^2 + x = 0$
b) $x^2 + 10x - 11 = 0$ f) $5x^2 - 18x - 8 = 0$ j) $9x^2 - 25 = 0$
c) $x^2 + x + 12 = 0$ g) $9x^2 - 12x + 9 = 0$ k) $-x^2 - 16 = 0$
d) $x^2 - 3x - 108 = 0$ h) $5x^2 - 6x + 2 = 0$ l) $x^2 + 10x + 25 = 0$

3. Řešte v R: a) $4(z-1) - z(z-1) = 0$ c) $a(3a-5) + 7(5-3a) = 0$
b) $(2x+7)(x+11) + (x+5)(x+11) = 0$ d) $x(x-2) + (x-2)(x+2) = 0$

4. Řešte v R užitím substitute: a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ c) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$
b) $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$ d) $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$

5. Řešte v R: a) $\frac{2}{5}x + 6 \leq 2 - \frac{1}{10}x$ d) $\frac{7}{3}x - \frac{11}{6}(x+3) \geq \frac{x-13}{2} - \frac{1-3x}{5}$

b) $\frac{4}{3}x - \frac{2}{5} \geq 0$ e) $\frac{3+5x}{2} - \frac{1-3x}{3} \geq \frac{7}{6}(1+3x)$

c) $4x - 5(2x+3) < -3(2x+4)$ f) $6 - 4x + 2(3x-1) > 2x + 5$

6. Řešte v R: a) $-x^2 - x + 12 > 0$ e) $x^2 - 8x + 16 > 0$
b) $x^2 - x - 6 \geq 0$ f) $x^2 + 2x + 4 < 0$
c) $x^2 + 2x - 63 > 0$ g) $x^2 + 14x + 49 \leq 0$
d) $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ h) $5x - x^2 \geq 0$

7. Řešte v N: a) $6 - 2(x+5) < 3x + 3(1-2x)$ b) $2(3-2x) + 3(x-2) \leq 3 - (2+3x)$
c) $\frac{2+3x}{4} - \frac{x+2}{2} \leq \frac{3x-1}{6}$

8. Vyjádřete neznámou x ze vzorce: a) $\frac{a}{x+1} = \frac{2a+1}{x-1}$ b) $y = \frac{2+x}{3-x}$

9*. Řešte v C: a) $x^2 + 9 = 0$ b) $x^2 + 2x + 5 = 0$ c) $5x^2 - 6x + 2 = 0$

10*. Řešte v R rovnice s parametrem $a \in R$: a) $15x - 7a = 2 + 6a - 3ax$
b) $x^2 - 2ax + 2a^2 - 9 = 0$

6) Soustavy rovnic a nerovnic

(metody řešení soustav)

1. Řešte v R^2 : a) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 2$ b) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}$ c) $2x + y = 3$ d) $\frac{2x+3y}{x} = \frac{3}{2}$
 $\frac{1}{4}x + \frac{1}{6}y = 6$ $\frac{1}{5}x - \frac{3}{4}y = -\frac{16}{5}$ $3x - \frac{1}{4}y = 1$ $\frac{3x+2y}{y} = -16$

e) $2,4x - 3y = -3(y - 0,8x) + 1$ f) $4x - 2(3x - 2y) + 6 = [3x + (2x + 3y - 3)] \cdot 2$
 $5x + 1,7y = 0$ $-[2(-y - 3x)] + 2 = (2x + y) + 2(4x + y)$

$$g) \frac{6x+3y}{6x-3y} = \frac{1}{3} \quad h) \frac{2}{x} - \frac{5}{y} = 0 \quad i) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{2x+4y}{x+5y} = \frac{1}{2} \quad \underline{5x-2y=1} \quad \underline{x+y=2}$$

2. Řešte početně i graficky: a) $3x-2y=4$ b) $x-y=5$
 $\underline{x+3y=5}$ $\underline{2x+y=1}$

3. Řešte v \mathbb{R}^3 : a) $3x+y-z=7$ b) $x+y-z=5$ c) $x+y-2z=-1$
 $x+2y-5z=15$ $2x+2y-2z=7$ $4x+3y-3z=-1$
 $\underline{3x+5y+2z=9}$ $\underline{x-3y+5z=15}$ $\underline{5x+y+5z=2}$

d) $x+y-z=17$ e) $x+y-2z=0$
 $x+z-y=13$ $2x+2y-3z=1$
 $\underline{y+z-x=7}$ $\underline{5x+5y-9z=1}$

4. Řešte v \mathbb{R}^2 : a) $5x^2-x-y^2=44$ b) $2x^2-y^2-2x-5=0$
 $\underline{y-2x=8}$ $\underline{3x-y-5=0}$

c) $x^2+xy-25=0$ d) $4x^2+y^2=20$ e) $y^2-2x+3=0$ f) $4x^2-y^2-4=0$
 $\underline{2x+3y-10=0}$ $\underline{2x+y-6=0}$ $\underline{x-y-1=0}$ $\underline{2x-y+4=0}$

5. Řešte v \mathbb{R} : a) $2x-3 < x+7$ b) $4x-2(1-x) \geq 1-(3-2x)$ c) $\frac{a}{3} + \frac{3a}{4} \geq \frac{5a}{6} + 2$
 $\underline{2-3x \leq 2x+7}$ $\frac{2x+3}{4} \leq 1 - \frac{x}{2}$ $\frac{7a-5}{5} \leq \frac{2a-1}{10}$

$$\underline{1 - \frac{2-x}{3} \geq 3(x+1) - 4}$$

d) $0 \leq x^2 + 11x + 30 < 2$ e) $x^2 - 10x + 9 \geq 0$ f) $-2 < x^2 + x - 14 < -6x - 24$
 $\underline{x^2 - x - 12 < 0}$

g) $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{x-2} - \frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{x-2}$ h) $\frac{1}{x-1} \leq 2 \wedge \frac{2x}{x-5} \leq 1$

6*. Řešte graficky: a) $2x-y-2 \leq 0$ b) $3x-2y-4 \leq 0$ c) $3x-y=4$ d) $4x+3y \leq 12$
 $\underline{2x-2y+1 \geq 0}$ $\underline{y \geq 1}$ $\underline{x+y \geq 0}$ $\underline{-2 \leq y \leq 3}$

7) Rovnice s neznámou pod odmocninou, rovnice a nerovnice s neznámou ve jmenovateli

(úpravy iracionálních rovnic, rovnice s neznámou ve jmenovateli – definiční obor, nerovnice s neznámou ve jmenovateli – metody řešení)

1. Řešte v \mathbb{R} : a) $\sqrt{18-x}-2=x$ b) $x=3\sqrt{2x}+8$ c) $4\sqrt{x+1}-(x+1)=4$
d) $\sqrt{x^2-5}+5=x$ e) $\sqrt{1+x}-\sqrt{4-x}=1$ f) $\sqrt{4-x}-\sqrt{9+x}=1$
g*) $x+\sqrt{1+x\sqrt{x}}=1$ h) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{2x+3}$

2. Řešte v \mathbb{R} :

a) $\frac{4}{x+1} = \frac{3}{x+3} + \frac{1}{x-2}$ b) $\frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^2-x} + \frac{x^2-2}{x^2-1} = 1$ c*) $\frac{\frac{1}{x}-3}{1-\frac{4}{x}} - \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x}} = \frac{96}{16-x^2} - 5$

$$d) \frac{1}{1 - \frac{3-x^2}{x+1}} = \frac{1}{x + \frac{2x}{x+1}} \quad e) \frac{x^2+x-56}{64-x^2} = 0 \quad f) \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x+1} = 1 \quad g) \frac{x^2+6}{x^2-4} = 3$$

$$h) \frac{(x^2-6x+9)(50-x^2)(4x^2+25)x^2}{(2-x)(x^2-9)} = 0$$

3. Řešte v R: a) $\frac{3-x}{x+2} \geq 1$ b) $\frac{x-1}{3-x} \geq -2$ c) $\frac{x+1}{2-x} \geq -3$ d) $\frac{-2}{x+3} \geq 1 - \frac{4}{x}$ e*) $\frac{2x^2}{3x^2+x} \leq 1$

f*) $\frac{4x^2+x}{4x^2+2x} \leq 0$ g*) $\frac{2x}{x^2-16} \leq \frac{1}{x-5}$ h*) $\frac{3x^2+15x-8}{2x^2+5x+3} \leq 1$ i*) $\frac{x^2-5x+6}{x-1} \leq 0$

j) $\frac{(x-4)(x+2)}{x} + x \leq 4$ k*) $\frac{(x^2-x-2)(x^2+1)}{(x+1)^2(x+2)x^2} \geq 0$ l) $\frac{x^2-12x+9}{x^2+9} \leq -1$

8) Exponenciální a logaritmické rovnice

(metody řešení exponenciálních a logaritmických rovnic, definiční obor)

1. Řešte v R: a) $0,25 = 2^x$ b) $3^3 \cdot 3^{12} = (3^x)^3$ c) $2^{x-2} \cdot 8^{x+4} = 4^3$ d) $25^{0,5x^2-3} = 0,04$
2. Řešte v R: a) $2^{2x} \cdot 8 = 27 \cdot 3^{2x}$ b) $16^2 \cdot 3^x = 2^{2x} \cdot 81$ c) $3^x - 2^x = 2^{x+1} + 3^{x-2}$ d) $2^{x+1} \cdot 3^x = 3^{-2} \cdot 0,5$
- e) $2^x \cdot 5^{x+1} + 10^x = 0,6$
3. Řešte v R: a) $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^{x+3} = \frac{21}{8}$ b) $4^{x+1} + 4^x - 8 \cdot 4^{x-1} = 192$
4. Řešte v R: a) $5 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^{2x} - 2 = 0$ b) $0,25 \cdot 2^x + 0,5 \cdot 4^x = 9$ c) $2^{2x-4} = 5 \cdot 2^{x-2}$
- d) $3^{2x+1} - 4 \cdot 3^{x+2} = -81$ e) $7^{x+1} - 19 = 7^x + 23$ f) $4^x + 4^{1-x} - 4 = 0$
5. Řešte v R: a) $\log_{0,1} 1000 = x$ b) $\log_{\sqrt{5}} x = 6$ c) $\log_x 81 = -8$
- d) $\log_3(5x+1) = 4$ e) $\log_{x-1} 125 = -3$ f) $\log_5 \log_4 \log_{\frac{1}{3}} x = 0$
6. Vypočítejte: a) $x = \log_4 64 + \log_3 \frac{1}{27} + \log_{16} 2$ b) $x = \log_4 1 + \log_{12} 12 + \log 0,01$
- c) $x = 0,5 \log_4 100 - \log_4 5$ d) $x = \log_3 18 - \log_3 2$
7. Řešte v R: a) $\log 0,1 + \log(2x) = 1$ b) $\log 1000 + \log x = 4$ c) $\log x^3 + \log \sqrt{x} - \log \frac{1}{x} = 9$
- d) $\log_4(x-4) + \log_4(x-1) = 1$ e) $\log(x+2) + \log(x+5) = 2 \log(x+3)$
- f) $\log_2(x+6) - \log_2(3-x) = 3$ g) $\log_3 x + \log_3(x+1) = 2 - \log_3 \frac{3}{2}$
- h) $\log x + \log 4 = 2 - \log(x+10)$
8. Řešte v R: a) $\log_3 x + 1 = \frac{6}{\log_3 x}$ b) $x \log 4^{x+1} = (x+1) \log 8$
- c) $\frac{2}{\log_2 x + 1} - \frac{1}{\log_2 x - 5} = 1$ d) $\log^2 x + 3 \log x - 4 = 0$

9*. Řešte v R: a) $x^{\log_2 x} = 4x$ b) $x^{1+\log x} = 100$ c) $x^{3+4\log x} = 10x^6$
 d) $2^x \cdot 3^{3x} = 4^{x-1}$ e) $8^{x+1} = 0,1$ f) $3^{x-2} = 5^{2x+1}$

10*. Řešte v R: a) $\frac{3^{x-6}}{3^{5-2x}} = \frac{\log 27}{\log 3}$ b) $\log_6\left(\frac{1}{6^x} + 5\right) = x+1$

9) Goniometrické rovnice

(tabulkové hodnoty goniometrických funkcí, metody řešení, definiční obor)

1. Vypočítejte z paměti: $\cos 120^\circ$ $\cos \frac{7}{6}\pi$ $\cos\left(-\frac{7}{4}\pi\right)$ $\sin \frac{3}{4}\pi$ $\sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right)$ $\sin 270^\circ$

$\operatorname{tg} 150^\circ$ $\operatorname{tg} 270^\circ$ $\operatorname{tg}\left(-\frac{5}{3}\pi\right)$ $\operatorname{cotg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ $\operatorname{cotg} \frac{11}{6}\pi$ $\operatorname{cotg} \frac{5}{6}\pi$

2. Řešte v $\langle 0; 2\pi \rangle$: a) $\cos x = \frac{1}{2}$ b) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

d) $\operatorname{cotg} x = -1$ e) $\cos x = 0$ f) $\sin x = -1$

3. Řešte v R: a) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ b) $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\operatorname{cotg} \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\cos(3x - 60^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Řešte v $\langle 0; 2\pi \rangle$: a) $(\sin x - 0,5)^2 = 1$ b) $3\operatorname{tg}^2 x = 1$ c) $2\cos^2 x = 1$

d) $4\sin^2 x = 3$ e) $\frac{5 + \cos x}{1 - \cos x} = 3$

5. Řešte v R: a) $\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x = 0$ b) $2\sin^2 x + 5\sin x + 3 = 0$

c) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ d) $\operatorname{cotg}^2 x - \operatorname{cotg} x - 2 = 0$

6*. Řešte v R: a) $\cos x + \sin 2x = 0$ b) $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x = 0$

c) $\sin x - \sin 2x = 0$ d) $\operatorname{cotg}^2 x - \sqrt{3}\operatorname{cotg} x = 0$

7*. Řešte v R: a) $\operatorname{tg} x - 3\operatorname{cotg} x = 0$ b) $\cos 2x - \sin x \cos x = 1$

c) $\cos x = \sqrt{3}\sin x$ d) $\cos 2x = \sin x$

8*. Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ má rovnice $\cos x = \frac{a}{a+1}$ alespoň jedno řešení v R.

10) Funkce kvadratická, nepřímá úměrnost a lineární lomená

(funkční předpis, vlastnosti a graf funkcí, úprava předpisu – na vrcholový (středový) tvar)

1. Určete funkční předpis kvadratické funkce, která prochází body:

a) $[1;4], [-1;-6], [0;0]$ b) $[1;3], [-2;-3], [0;-1]$ c) $[1;3], [-1;7], [2;7]$

2. Určete funkční předpis kvadratické funkce s vrcholem $V[2;5]$, jejíž graf prochází také bodem $[3;4]$.

3. Je dána kvadratická funkce f .

A) upravte předpis na vrcholový tvar

B) určete souřadnice vrcholu a průsečíků grafu s osami

C) načrtněte graf

D) určete D, H

E) z grafu určete vlastnosti funkce (monotónnost, extrémy, omezenost, sudost – lichost)

a) $f_1: y = x^2 - 4x + 5$ b) $f_2: y = -x^2 + 4x - 3$ c) $f_3: y = -2x^2 + 4x$ d) $f_4: y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$

4. Určete funkční předpis nepřímé úměrnosti, jejíž graf prochází bodem: a) $[5;1]$ b) $[-1;0,25]$

5. Je dána lineární lomená funkce g .

A) upravte předpis na středový tvar

B) určete souřadnice středu a průsečíků grafu s osami

C) určete asymptoty

D) načrtněte graf

E) určete D, H

F) z grafu určete vlastnosti funkce (monotónnost, extrémy, omezenost, sudost – lichost)

a) $g_1: y = \frac{-2x-5}{x+3}$ b) $g_2: y = \frac{3x-7}{x-2}$ c) $g_3: y = \frac{2x+3}{x+1}$ d) $g_4: y = \frac{-x+2}{x-3}$

6*. Pomocí derivace určete extrémy a monotónnost funkcí:

a) $f_1: y = x^2 + 6x - 3$ b) $f_2: y = 2x^2 - 3x + 5$ c) $f_3: y = -2x^2 + 4x + 6$

d) $g_1: y = \frac{5x+2}{x+3}$ e) $g_2: y = \frac{x-3}{x+2}$ f) $g_3: y = \frac{-x+5}{x-1}$

11) Mocninné funkce a jejich inverze

(typy a vlastnosti mocninných funkcí podle mocnitelů, inverzní funkce – vztah D, H, grafu, předpisu vzhledem k funkci původní)

1. Pomocí grafu charakterizujte vlastnosti mocninných funkcí v závislosti na mocniteli

$f: y = x^2$ $g: y = x^3$ $h: y = x^{-2}$ $i: y = x^{-3}$

2. Pomocí vhodných grafů porovnejte čísla podle velikosti:

a) $1,2^{-2}$; $1,8^{-2}$ b) $(-2,1)^{-4}$; $(-2,2)^{-4}$ c) $1,2^{-3}$; $(-0,1)^{-3}$ d) $0,3^4$; $0,3^5$
e) $0,5^2$; $0,5^{-2}$ f) $2,4^3$; $2,4^{-2}$ g) $(-4,2)^5$; $(-4,2)^{-5}$ h) $(-3,1)^{-3}$; $(-3,1)^{-4}$

3. K dané funkci f sestrojte její graf a zvolte interval, na kterém je daná funkce prostá. Určete předpis funkce inverzní, její D, H a graf.

$f_1: y = (x-2)^2 - 1$ $f_2: y = (x+1)^2 - 3$ $f_3: y = x^3 - 1$ $f_4: y = (x-1)^3 + 2$

4*. Pomocí vhodných grafů řešte nerovnice:

a) $x^4 > x^3$ b) $x^{-4} > x^7$ c) $x^{-5} \leq -x^7$ d) $-x^5 \geq x^{-8}$
e) $-x^5 \leq x^6$ f) $x^{-2} \leq x^{-3}$ g) $x^{-4} > -x^4$ h) $-x^{-4} \leq x^5$

12) Exponenciální a logaritmické funkce

(funkční předpisy, grafy, vlastnosti funkcí)

1. Určete reálná čísla a, b tak, aby graf funkce $f: y = a \cdot 3^x + b$ procházel body $[1;2]$ a $[0;-2]$.
2. Určete reálná čísla a, b tak, aby graf funkce $g: y = 2^{x+a} + b$ procházel body $[-1;5]$ a $[1;11]$.
3. Určete reálná čísla a, b tak, aby graf funkce $h: y = \log_2(x+a) + b$ procházel body $[0;1]$ a $[-2;0]$.
4. Určete reálná čísla a, b tak, aby graf funkce $i: y = a \cdot \log_{\frac{1}{3}} x + b$ procházel body $[1/9;3]$ a $[3;6]$.
5. Určete všechny hodnoty reálného parametru p tak, aby daná funkce byla definována (resp. klesající, resp. rostoucí):

$$a) f: y = \left(\frac{2p-1}{p^2-1}\right)^x \quad b) g: y = \log_{\frac{2p+3}{p-1}} x$$

$$6. \text{ Určete definiční obor funkce: } a) f: y = \log \frac{x^2-9}{3x} \quad b) g: y = \frac{1}{\log_2(x+3)-2}$$

7. Je dána funkce f

A) určete průsečíky grafu s osami

B) určete D, H, asymptoty

C) načrtněte graf dané funkce

D) z grafu určete vlastnosti funkce (sudost – lichost, monotónnost, extrém, omezenost)

$$a) f_1: y = 2^{x+1} - 1 \quad b) f_2: y = 2^{-x+1} + 1 \quad c) f_3: y = -2^{x-2} + 2 \quad d) f_4: y = \log_2(x+4)$$

$$e) f_5: y = \log_{\frac{1}{2}}(x-2) + 1 \quad f) f_6: y = -\log_2 x + 2 \quad g) f_7: y = \log_{\frac{1}{2}}(-x) + 1$$

8. Užitím grafu vhodné funkce rozhodněte, které z čísel je větší:

$$a) 0,8^{-2}; 0,8^{-3} \quad b) 3,2^{-4}; 3,2^{-3} \quad c) 0,9^{-2}; 0,9^2 \quad d) 2^{-3,4}; 0,5^{-3,4} \quad e) 1; 0,9^{0,7}$$
$$f) \log_{\frac{1}{5}} 3; \log_{\frac{1}{5}} 7 \quad g) \log_4 9; \log_4 10 \quad h) 1; 2,5^{-4} \quad i) 1; 0,1^{-4,2}$$

9*. Užitím grafu vhodné funkce rozhodněte, jaký vztah platí mezi reálnými čísly x, y , víte-li, že platí:

$$a) \left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^y \quad b) \left(\frac{9}{8}\right)^x < \left(\frac{9}{8}\right)^y \quad c) \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} y \quad d) \log_{\frac{3}{2}} x > \log_{\frac{3}{2}} y$$

10*. Určete předpis inverzní funkce k zadané funkci. Načrtněte do jedné soustavy souřadnic grafy obou funkcí. Určete definiční obory a obory hodnot těchto funkcí.

$$a) f: y = 2^{x-1} - 4 \quad b) g: y = \log_{\frac{1}{2}}(x-3) + 2$$

13) Goniometrické funkce a výrazy

(goniometrické funkce, goniometrické vzorce)

1. Aniž určíte hodnotu x , určete hodnoty zbývajících goniometrických funkcí v bodě x , víte-li, že:

$$a) \sin x = \frac{8}{17} \wedge x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \quad b) \cos x = \frac{24}{25} \wedge x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$$

$$c) \operatorname{tg} x = \frac{12}{5} \wedge x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right) \quad d) \operatorname{cotg} x = \frac{12}{11} \wedge x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

2. Na základě hodnot goniometrických funkcí, které znáte z paměti, vypočítejte: a) $\sin 75^\circ$, b) $\cos 105^\circ$, c) $\sin 15^\circ$.

3. Vyjádřete jedinou funkcí:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} & \frac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos x + \cos 2x} & \text{b)} & \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} & \text{c)} & \frac{\cos x + \cot gx}{\cot gx} - 1 & \text{d)} & \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \\
 \text{e)} & \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + \cot gx} & \text{f)} & \sin 2x - \cos 2x \cdot \operatorname{tg} x & \text{g)} & \sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x & \text{h)} & \cos^4 x - \sin^4 x
 \end{array}$$

4. Načrtněte grafy funkcí a popište, jak vypadají vzhledem ke grafu základní funkce:

$$\text{a)} \quad f: y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad g: y = 2 \sin x \quad h: y = \sin 2x \quad i: y = \sin x + 1$$

$$\text{b)} \quad f: y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \quad g: y = \frac{1}{2} \cos x \quad h: y = \cos \frac{x}{2} \quad i: y = -\cos x$$

$$\text{c)} \quad f: y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \quad g: y = 2 \operatorname{tg} x \quad h: y = \operatorname{tg} x + 2$$

$$\text{d)} \quad f: y = \operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad g: y = -\operatorname{cotg} x \quad h: y = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} x$$

$$5^*. \text{ Dokažte, že platí: } \text{a)} \quad \frac{\sin 65^\circ + \sin 25^\circ}{\cos 80^\circ + \cos 40^\circ} = \sqrt{2} \quad \text{b)} \quad \frac{\cos 50^\circ - \cos 70^\circ}{\sin 70^\circ - \sin 50^\circ} = \sqrt{3}$$

$$\text{c)} \quad 2 \sin 22^\circ 30' \cdot \cos 22^\circ 30' = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{d)} \quad \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ = \frac{1}{4}$$

14) Absolutní hodnota

(geometrický význam absolutní hodnoty, metody řešení rovnic a nerovnic s absolutní hodnotou, sestrojení grafu funkce s absolutní hodnotou)

1. Řešte v \mathbb{R} užitím geometrického významu absolutní hodnoty:

$$\begin{array}{llllll}
 \text{a)} & |x - 2| = 4 & \text{b)} & |x + 5| = 7 & \text{c)} & |x + 1| = -3 & \text{d)} & |2x + 3| = 8 & \text{e)} & |4 - x| = 5 \\
 \text{f)} & |x - 2 - \sqrt{3}| = 2 & \text{g)} & |x| \geq 3 & \text{h)} & |x - 2| < 5 & \text{i)} & |x + \frac{1}{2}| \leq 7 & \text{j)} & |x - 3| \leq 0 \\
 \text{k)} & |x - 8| \leq -3 & \text{l)} & |x + 6| \geq -4 & \text{m)} & |x + \sqrt{3}| > 0 & & & &
 \end{array}$$

$$2. \text{ Řešte v } \mathbb{R}: \text{ a)} \quad 3 + 4|x - 2| = 5x$$

$$\text{f)} \quad |2x - 3| \geq |3x - 2|$$

$$\text{b)} \quad 3x - |2x - 1| = x + 1$$

$$\text{g)} \quad |3 - x| < 4|x - 1|$$

$$\text{c)} \quad |2x - 7| + |x - 2| = 3$$

$$\text{h)} \quad |x + 2| + 2x \geq 4(x + 3)$$

$$\text{d)} \quad |x| - 2|x + 1| + 3|x + 2| = 0$$

$$\text{i)} \quad |x + 4| + \frac{x+1}{2} \leq \frac{|x-5|}{2}$$

$$\text{e)} \quad \frac{|1-x|}{2} - \frac{|3+x|}{6} = 1 - \frac{x}{3}$$

3. Načrtněte graf funkce f užitím grafu $y = |x|$.

$$f_1: y = |x| + 1$$

$$f_2: y = |x + 2|$$

$$f_3: y = 2|x|$$

$$f_4: y = -|x|$$

4. Sestrojte graf funkce:

$$f: y = |x - 2| - 2|x + 1|$$

$$g: y = |x - 4| - 1 + |x|$$

$$h: y = 3|x - 1| + |3 - x| - |5 - 2x| - 1$$

$$i: y = |x| + 2|x + 1| - 3|x - 3|$$

5*. Sestrojte graf funkce: $a: y = |x^2 + 4x + 3|$

$$b: y = \left| \frac{3x-4}{x-1} \right|$$

$$c: y = \left| \frac{2x+1}{x+1} \right|$$

6*. Vypočítejte: $|4 + 3i|$, $|(8 + i)(3 - 2i)|$, $\left| \frac{4+2i}{3-i} \right|$

15) Operace s vektory

(vektor – souřadnice, velikost, operace, úhel, skalární a vektorový součin, lineární kombinace, lineární závislost a nezávislost)

1. Rozhodněte, zda body K, L, M leží na přímce:

- a) $K[2;0;1]$, $L[5;-2;0]$, $M[-1;2;2]$ b) $K[-1;1]$, $L[1;5]$, $M[2;3]$

2. V rovnoběžníku ABCD platí $A[-3; -2;0]$, $B[3; -3;1]$, $C[5;0;2]$. Najděte souřadnice vrcholu D a určete úhel vektorů \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BD} .

3. Vektor \mathbf{z} vyjádřete jako lineární kombinaci vektorů \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} – pokud lze:

- a) $\mathbf{a}(5; -1)$, $\mathbf{b}(17;7)$, $\mathbf{z}(5; -10)$ b) $\mathbf{a}(3; -2)$, $\mathbf{b}(4; -3)$, $\mathbf{z}(-6;4)$
c) $\mathbf{a}(1; -1;3)$, $\mathbf{b}(4;2;0)$, $\mathbf{z}(0;3; -6)$ d) $\mathbf{a}(0;3;4)$, $\mathbf{b}(6; -1; -1)$, $\mathbf{z}(-5;4;5)$
e) $\mathbf{a}(1;0;2)$, $\mathbf{b}(1; -1;0)$, $\mathbf{c}(0;1;1)$, $\mathbf{z}(1;0;3)$

Rozhodněte, zda jsou vektory \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{z} , \mathbf{c} lineárně závislé.

4. Určete, pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ jsou vektory \mathbf{m} a \mathbf{n} kolmé:

- a) $\mathbf{m}(1;a; -2)$, $\mathbf{n}(a;3; -4)$ b) $\mathbf{m}(1 - a;2;a)$, $\mathbf{n}(a;2;2)$

5. Určete, pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ jsou vektory \mathbf{k} a \mathbf{l} rovnoběžné: $\mathbf{k}(2;3; -4)$, $\mathbf{l}(a; -6;8)$

6. Je dán vektor $\mathbf{u}(3; -4)$. Určete vektor \mathbf{v} tak, aby platilo: a) $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ a $|\mathbf{v}| = 10$ b) $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ a $|\mathbf{v}| = 15$

7.* Jsou dány vektory $\mathbf{a}(1;1;0)$, $\mathbf{b}(0;x;y)$. Určete hodnoty $x, y \in \mathbb{R}$ tak, aby $|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| = \frac{\pi}{3}$ a $|\mathbf{b}| = 2\sqrt{2}$.

8.* Rozhodněte, zda jsou body $A[2;3;4]$, $B[-1;4; -2]$, $C[0;2; -5]$, $D[3;2;1]$ komplanární.

9.* Jsou dány vektory $\mathbf{u}(2;a;3)$, $\mathbf{v}(-1;4;2)$. Určete hodnotu $a \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{14}$.

16) Analytická vyjádření lineárních útvarů

(analytické vyjádření úsečky, polopřímky, přímky; vzdálenost bodu od přímky, vzájemná poloha přímek, rovina)

1. Jsou dány body $A[-1;3]$, $B[5; -7]$: a) запиште rovnici úsečky AB b) určete její střed
c) vypočítejte délku úsečky AB d) запиште rovnici osy úsečky AB

2. Jsou dány body $A[2; -3]$, $B[1;0]$, $C[0;3]$, $D[1;3]$.

- a) určete parametrickou rovnici přímky $p = \leftrightarrow AB$
b) určete obecnou rovnici přímky p
c) určete směrnicový tvar rovnice přímky p
d) určete úsekový tvar rovnice přímky p
e) zjistěte, zda body C, D leží na přímce p , pokud neleží, určete vzdálenost bodu od přímky p

3. Jsou dány přímky p, q . Určete jejich vzájemnou polohu, pokud jsou různoběžné, určete jejich průsečík:

- a) $p: 2x + 3y + 6 = 0$, $q = \{[-6 + 3t; 2 - 2t], t \in \mathbb{R}\}$
b) $p: 2x - 15y + 10 = 0$, $q = \{[5 + 5t; 8 + 4t], t \in \mathbb{R}\}$
c) $p = \{[1 + 2t; 2 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$, $q = \{[-1 + 2k; 7 - 3k], k \in \mathbb{R}\}$
d) $p: 7x - 3y - 15 = 0$, $q: 5x + 6y - 27 = 0$

4. Napište obecnou rovnici přímky p , která prochází průsečíkem přímek $a: 2x - y - 5 = 0$ a $b = \{[t; 1 - t], t \in \mathbb{R}\}$ kolmo k přímce $q: x + 3y + 7 = 0$.

5. V rovnici přímky $p: bx - 2y + 1 = 0$ urči hodnotu parametru $b \in \mathbb{R}$ tak, aby přímka p :

- a) procházela bodem $E[2;2]$

- b) byla kolmá k přímce $a: 2x + y + 1 = 0$
 c) byla rovnoběžná s přímkou $q: y = -x + 1$

6. Je dána přímka $p: x - 3y + 1 = 0$. Určete odchylku přímky p :
 a) od přímky $q = \{[1 + t; 3 + 2t], t \in \mathbb{R}\}$
 b) od přímky $r: 6x + 2y + 3 = 0$

7.* Najděte obraz bodu $A[-2; 1]$ v osové souměrnosti s osou $o: 2x - y + 3 = 0$.

8.* Na přímce $p: x + 2y + 2 = 0$ určete bod M tak, aby jeho vzdálenost od přímky $q: 3x + 4y - 14 = 0$ byla 2.

17) Analytická geometrie rovinných obrazců

(trojúhelník, rovnoběžník a jejich charakteristiky vyjádřené pomocí analytické geometrie)

- Je dán ΔABC ; $A[-1; 6]$, $B[-7; -6]$, $C[5; -2]$. Určete rovnice přímek, na kterých leží výšky trojúhelníku. Určete průsečík výšek a velikosti výšek.
- Je dán ΔABC , $A[5; 6]$, $B[-2; 4]$, $C[6; -1]$. Určete rovnice přímek, na kterých leží těžnice. Určete souřadnice těžiště a délky těžnic.
- V ΔABC , $A[-2; 1]$, $B[-1; -2]$, $C[3; 6]$ vypočítejte délky středních příček.
- Je dán ΔABC . Vypočítejte délky jeho stran, velikosti vnitřních úhlů a jeho obsah, je-li:
 - $A[1; 2; 3]$, $B[-1; -2; -2]$, $C[0; 2; 1]$
 - $A[1; 5]$, $B[2; 0]$, $C[5; 2]$
- Vypočítejte obsah rovnoběžníku $ABCD$, je-li $A[-1; -1]$, $B[5; 1]$, $C[2; 4]$.
- * Určete vrchol C rovnostranného ΔABC je-li $A[-1; -1]$, $B[-1; 3]$.
- * Určete vrchol C pravoúhlého ΔABC s přeponou AB je-li $A[2; -1]$, $B[3; 4]$ a bod C leží na ose y .
- * Určete vrchol C rovnoramenného ΔABC se základnou AB je-li $A[-2; 3]$, $B[4; -1]$ a bod C leží na přímce $p: x - y + 4 = 0$.
- * Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce $ABCD$, znáte-li souřadnice bodů $A[1; 2]$ a $S[3; 4]$, kde S je střed čtverce.
- * Určete souřadnice vrcholů obdélníku $ABCD$, znáte-li body $A[2; 0]$ a $B[-6; 2]$ a víte-li, že střed obdélníku S leží na přímce $6x - y + 10 = 0$.

18) Kuželosečky

(kuželosečky – přehled, definice, tvary rovnic, charakteristiky)

- Úpravou na středový – vrcholový tvar rozhodněte, zda a jakou kuželosečku daná rovnice vyjadřuje. Určete charakteristické prvky kuželosečky. Načrtněte obrázek:

a) $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$	b) $x^2 + y^2 + 2x - y - 1 = 0$
c) $9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0$	d) $9x^2 + 4y^2 - 36x + 72y + 360 = 0$
e) $x^2 - 6x - 12y + 57 = 0$	f) $x^2 - 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$
g) $x^2 - 10x + 4y + 33 = 0$	h) $y^2 - 2x + 6 = 0$
i) $x^2 - 2y^2 + 4x + 12y - 23 = 0$	j) $2x^2 + 3y^2 + 12x - 6y + 9 = 0$
- Zjistěte polohu bodu $A[-2; 1]$ vzhledem ke kružnici k :

a) $x^2 + y^2 = 25$	b) $x^2 + y^2 = 5$	c) $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$
---------------------	--------------------	------------------------------
- Určete rovnici kružnice se středem $S[3; -5]$, která prochází bodem $K[-6; 8]$.

4. Napište rovnici elipsy, jejíž vedlejší vrcholy jsou $C[0; -3]$, $D[0;3]$ a vzdálenost ohnisek je 8.
5. Zapište rovnici paraboly s ohniskem F a řídicí přímkou d :
- a) $F[4;0]$, $d: y = 2$ b) $F[-3; -4]$, $d: y = -8$ c) $F[6;2]$, $d: x = 8$ d) $F[2; -1]$, $d: x = -4$
6. Napište rovnici elipsy s ohnisky $F[-5;11]$ a $G[-5;3]$ a hlavní poloosou $a = 5$.
- 7.* Určete rovnici kružnice opsané ΔABC , kde $A[2;1]$, $B[1;4]$, $C[6;9]$.
- 8.* Napište rovnici kružnice se středem $S[8; -5]$, která na přímce $p: 3x + 4y - 14 = 0$ vytíná tětivu délky 8.
- 9.* Napište rovnici elipsy se středem $S[-2;1]$, jejíž osy jsou rovnoběžné s osami soustavy souřadnic a která se obou os dotýká.
- 10.* Napište obecnou rovnici kružnice, která má střed na přímce $p: 5x - 4y - 28 = 0$ a prochází body $M[1;5]$, $N[7; -3]$.

19) Příмка a kuželosečka

(přehled vzájemných poloh přímký a kuželosečky, tečna kuželosečky)

1. Určete vzájemnou polohu kružnice $k: x^2 + y^2 = 10$ a přímký p :
- a) $p: x - y - 2 = 0$ b) $p: x - 3y - 10 = 0$ c) $p: 3x + y + 12 = 0$
2. Určete vzájemnou polohu elipsy $e: 4x^2 + 9y^2 = 36$ a přímký p :
- a) $p: 2x + 3y - 6 = 0$ b) $p: x - y - 6 = 0$ c) $p: y - 2 = 0$
3. Určete vzájemnou polohu paraboly $p: y^2 - 6x + 12 = 0$ a přímký q :
- a) $q: 3x - 2y - 2 = 0$ b) $q: x - 2y + 4 = 0$ c) $q: 3x - 2y - 5 = 0$ d) $q: y - 2 = 0$
4. Určete vzájemnou polohu hyperboly $h: 4x^2 - 25y^2 = 100$ a přímký p :
- a) $p: x - y - 5 = 0$ b) $p: x - y + \sqrt{21} = 0$ c) $p: x - y + 1 = 0$ d) $p: 2x - 5y + 5 = 0$
5. Napište rovnice tečen:
- a) kružnice $k: x^2 + y^2 - 6x + 10y + 14 = 0$ v bodě dotyku $T[x_0; -3]$
b) elipsy $e: x^2 + 2y^2 - 8y = 0$ v jejich průsečících s osou x
c) paraboly $p: y = 2x^2 - 5x + 1$ v bodě dotyku $T[2; y_0]$
d) hyperboly $h: x^2 - 9y^2 = 9$ v bodě $T[-3; 0]$
- 6*. Napište rovnice tečen ke kuželosečce k , které jsou rovnoběžné s přímkou p :
- a) $k: (x - 2)^2 + (y + 6)^2 = 13$, $p: 2x - 3y + 5 = 0$
b) $k: 9x^2 + 25y^2 = 225$, $p: 4x + 5y - 7 = 0$
- 7*. Napište rovnice tečen ke kuželosečce $k: 4x^2 + y^2 = 16$, které jsou kolmé k přímce $p: x + 2y + 2 = 0$.
- 8*. Určete, pro kterou hodnotu parametru $c \in \mathbb{R}$ je rovnice $x - y + c = 0$ rovnici tečny kružnice $k: x^2 + y^2 + 2x - 6y - 45 = 0$.
- 9*. Určete délku tětivy, kterou na elipse $e: x^2 + 2y^2 - 8y = 0$ vytíná příмка $p: y = 2x$.
- 10*. Napište rovnici přímký p , která prochází středem hyperboly $h: x^2 - y^2 + 4x - 2y + 13 = 0$ a je rovnoběžná s přímkou $q: 2x - y + 2 = 0$.
- 11.* Napište rovnice tečen kuželosečky k vedených bodem P :
- a) $k: x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0$, $P[0;0]$
b) $k: x^2 = 8y$, $P[1; -3]$

20) Stereometrie – polohové úlohy, řezy

(řezy na krychli a jehlanu, průnik přímky a roviny, průnik dvou rovin, vzájemná poloha rovin, průnik přímky s povrchem tělesa)

1. Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou:

a) $S_{EH} S_{HG} S_{FB}$ b) $AS_{BF}M \wedge M \in EH \wedge |EM| = 3|MH|$ c) $XS_{EF} S_{FG} \wedge X \in AE \wedge |EX| = 3|AX|$

2. Sestrojte řez krychle ABCDEFGH rovinou:

a) $XY S_{CG} \wedge X \in AE \wedge |AX| = 3|EX|$, $Y \in \rightarrow CB \wedge |CY| = \frac{3}{2}|CB|$

b) $XYZ \wedge X \in \rightarrow HE \wedge |HX| = \frac{3}{2}|HE|$, $Y \in CD \wedge |CY| = 3|DY|$, $Z \in \rightarrow CG \wedge |CZ| = 2|CG|$

3. Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu ABCDV rovinou:

a) $S_{AB}S_{BC}L \wedge L \in CV \wedge |VL| = 3|CL|$ b) $S_{AV}KC \wedge K \in AB \wedge |AK| = 3|KB|$

4. Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu ABCDV rovinou:

a) $KLS_{CV} \wedge K \in AD \wedge |KD| = 3|KA|$, $L \in \rightarrow DC \wedge |DL| = 2|CD|$

b) $S_{AV}KC \wedge K \in \rightarrow VB \wedge |VK| = \frac{3}{2}|VB|$

5*. Je dána krychle ABCDEFGH. Vyšetřete vzájemnou polohu 3 rovin (roviny vyznačte a určete společné body): a) $ABD, DS_{CG}G, AS_{GH}S_{EH}$ b) $AD S_{EG}, BCS_{EG}, ACD$ c) $ADS_{GH}, GFS_{AB}, S_{AE}S_{BF}S_{DH}$

6*. Je dána krychle ABCDEFGH. Sestrojte průsečnici rovin: a) $BCG, AS_{FG}E$ b) $ACG, HS_{AD}B$

21) Stereometrie – metrické úlohy

(vzdálenost bodů, bodu a přímky; odchylka dvou přímek, přímky a roviny, dvou rovin)

1. Je dána krychle ABCDEFGH s hranou a. Vypočítejte vzdálenost bodů:

a) S_{AC}, S_{HE} b) $A, X \wedge X \in CG \wedge |CX| = 3|XG|$

2. Je dán pravidelný čtyřboký hranol ABCDEFGH ($a = 4, v = 6$). Vypočítejte vzdálenost bodů:

a) C, S_{EH} b) $K, L \wedge K \in AD \wedge 3|AK| = |KD|$, $L \in HG \wedge |HL| = 3|LG|$

3. Je dána krychle ABCDEFGH s hranou a. Vypočítejte vzdálenost bodu a přímky:

a) bodu G a přímky $S_{DC}S_{BC}$ b) bodu H a přímky $S_{AE}S_{CG}$

4. Je dán pravidelný čtyřboký hranol ABCDEFGH ($a = 4, v = 6$). Vypočítejte vzdálenost bodu a přímky:

a) bodu H a přímky AC b) bodu E a přímky HB

5. Je dána krychle ABCDEFGH s hranou a. Vypočítejte odchylku přímek:

a) $AC, S_{AE}C$ b) $CS_{HF}, S_{EG}S_{DB}$

6. Je dán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV ($a = 4, v = 6$). Vypočítejte odchylku přímek:

a) AV, CS_{BD} b) $VS_{BC}, S_{AD}S_{AC}$

7. Je dána krychle ABCDEFGH s hranou a. Vypočítejte odchylku přímky a roviny:

a) přímky AS_{EG} a roviny HDB b) přímky EF a roviny ABH

8. Je dán pravidelný čtyřboký hranol ABCDEFGH ($a = 4, v = 6$). Vypočítejte odchylku přímky a roviny:

a) přímky BH a roviny EFG b) přímky CH a roviny FBG

9.* Je dána krychle ABCDEFGH s hranou a. Vypočítejte odchylku rovin:

a) HDC, EFC b) AGE, DHF

10.* Je dán pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV ($a = 4, v = 6$). Vypočítejte odchylku rovin ABD a BCV.

22) Povrchy a objemy těles

(přehled těles – vztahy pro výpočet V , S)

1. Odvoďte vzorce pro výpočet objemu a povrchu:
 - a) pravidelného šestibokého hranolu s hranou a a výškou v
 - b) pravidelného čtyřstěnu s hranou a
2. Je dána krychle ABCDEFGH s hranou 4 cm. Vypočítejte V a S čtyřstěnu ACDH.
3. Vypočítejte V a S pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavou hranou $a = 4$ cm a odchylkou $\alpha = 60^\circ$
 - a) boční stěny od roviny podstavy
 - b) boční hrany od roviny podstavy
4. Rotační válec má objem π cm³ a výška válce se rovná polovině průměru podstavy. Vypočítejte povrch válce.
5. Osovým řezem válce je obdélník s obsahem 18 cm² a úhlopříčkou délky $3\sqrt{5}$ cm. Vypočítejte jeho V a S .
 - a) $v < d$
 - b) $v > d$
6. Do krabice tvaru pravidelného čtyřbokého hranolu s podstavou hranou $a = 4$ cm a výškou $v = 3$ cm dáme kouli o poloměru 2 cm. Vypočítejte
 - a) objem kulové úseče, která leží vně hranolu; kolik procent objemu koule úseč tvoří?
 - b) obsah kulového vrchlíku, který leží vně kvádrů; kolik procent povrchu koule vrchlík tvoří?
- 7.* Krychli o hraně a :
 - a) vepište kouli. Určete poměr objemu koule a krychle.
 - b) opište kouli. Určete poměr objemu koule a krychle.
- 8.* Kuželosečka $k: x^2 + y^2 = 4$ vymezí rotací kolem osy x rotační těleso. Nakreslete danou kuželosečku, těleso pojmenujte a pomocí určitého integrálu vypočítejte jeho objem.
- 9.* Pomocí určitého integrálu odvoďte vzorec pro výpočet objemu rotačního válce, který má poloměr podstavy r a výšku v .
- 10.* Pomocí určitého integrálu odvoďte vzorec pro výpočet objemu rotačního komolého kužele, jsou-li poloměry podstavy r_1 a r_2 výška komolého kužele je v .

23) Matematická logika

(množina – zápis, operace; výroky – složené, kvantifikované, negace; tabulka pravdivostních hodnot)

1. Jsou dány množiny $A = \{x \in \mathbb{R}; -6 < x \leq 3\}$, $B = \{-2; 8\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z}; |x| < 7\}$. Množinu A zapište intervalem, množinu C výčtem prvků. Určete: $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cap B$, $B \cap C$, $A - B$, A'_R , B'_R
2. Jsou dány výroky A , B . Přepište do češtiny složené výroky $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$. Určete pravdivostní hodnotu těchto složených výroků.
 - a) A – Číslo 8 je prvočíslo. B – Číslo 3 je prvočíslo.
 - b) A – Číslo 5 je liché. B – Číslo 6 je dělitelné čtyřmi.
3. Složené výroky zapište matematicky. Pak vytvořte v matematické symbolice také negace těchto výroků a ty vyjádřete opět slovně.
 - a) Číslo 5 je prvočíslo a je liché.
 - b) Jestliže je číslo dělitelné dvěma, pak je sudé.
 - c) Číslo 15 je dělitelné pěti a třemi.
 - d) Číslo 10 je větší než 9 a není dělitelné dvěma.
 - e) Číslo 27 je sudé nebo liché.
 - f) Jestliže je trojúhelník rovnostranný, pak je ostroúhlý.
 - g) Číslo 60 je dělitelné pěti nebo šesti.
 - h) Číslo je dělitelné patnácti právě tehdy, když je dělitelné pěti a třemi.

4. Negujte kvantifikované výroky.

- Číslo 8 má právě 4 dělitele.
- Alespoň 5 přirozených čísel je menších než 10.
- Koupím nejvýše 9 sešitů.
- $\forall x \in R; |x| \geq 0$
- $\exists x \in R; x < 1$
- Nikdo není dokonalý.
- Každé sudé číslo je dělitelné dvěma.
- $\forall x \in R; x \cdot 0 = 0$
- Rovnice $x - 1 = 3$ má právě jeden kořen.

5. Vyšetřete pravdivost zadaného výroku pomocí tabulky pravdivostních hodnot.

- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
- $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
- $\neg(A \wedge B) \wedge \neg(\neg A \vee \neg B)$
- $[\neg A \wedge (A \vee \neg B)] \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$
- $[(A \Rightarrow \neg B) \wedge (\neg A \Leftrightarrow B)] \vee (\neg A \Rightarrow B)$

6*. Vyšetřete pravdivost zadaného výroku pomocí tabulky pravdivostních hodnot.

- $\neg(A \wedge B) \Rightarrow C$
- $\neg C \vee \neg(A \vee B)$
- $C \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

7*. Negujte dané složené výroky, správnost následně potvrďte pomocí tabulky pravdivostních hodnot

- $A \Rightarrow (\neg B \vee C)$
- $(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg C$

8*. Pomocí tabulky pravdivostních hodnot rozhodněte, zda jsou dané složené výroky ekvivalentní

- $\neg A \Rightarrow (B \vee C); A \vee B \vee C$
- $A \Leftrightarrow (B \wedge C); (\neg A \vee (B \wedge C)) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C)$

24) Posloupnosti

*(aritmetická a geometrická posloupnost – vzorce pro výpočet n-tého členu, součet; ulohy na užití posloupností, * součet nekonečné geometrické řady)*

1. Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, je-li dáno $a_5 = 13, a_{11} = 49$.

2. Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, je-li dáno: $a_1 + a_4 = 195$
 $a_2 + a_3 = 60$

3. Vypočítejte součet $S = (-32) + (-27) + (-22) + \dots + 38 + 43 + 48$ po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti.

4. Pro geometrickou posloupnost kladných čísel platí $a_3 = 8 a_1 - 2 a_2$. Určete kvocient této posloupnosti.

5. V aritmetické posloupnosti je $a_4 = 0, a_6 = -4$. Určete počet sečtených členů n , je-li $s_n = 12$.

6. Sedmý člen aritmetické posloupnosti je 33, součet jejích prvních 11 členů je 308. Určete první člen a diferenci.

7. Sektor hlediště fotbalového stadionu má kapacitu 4 325 sedících diváků. Sedadla jsou v něm uspořádána tak, že ve spodní řadě je 13 sedadel a v každé další řadě je o 3 sedadla více než v předchozí. Kolik řad sedadel je v sektoru?

8. Město má 10 000 obyvatel. Každoročně vzroste jejich počet o 3 %. Kolik obyvatel bude mít město za 5 let?

9*. Dané reálné číslo zapište zlomkem v základním tvaru: a) $0,\overline{370}$ b) $2,\overline{4}$ c) $1,\overline{032}$

10*. Stroj ztrácí opotřebením každý rok 5 % své ceny. Určete, za jakou dobu klesne cena stroje na polovinu.

25) Kombinatorika a pravděpodobnost

(variace, permutace, kombinace – úlohy; rovnice a nerovnice s kombinačními čísly; binomická věta; pravděpodobnost)

1. Vypočítejte:

- O telefonním čísle svého spolužáka si Petr zapamatoval jen to, že je šestimístné, začíná sedmičkou, neobsahuje žádné dvě stejné číslice a je dělitelné 25. Určete, kolik telefonních čísel přichází v úvahu?
- Určete počet všech přirozených čísel menších než 500, v jejichž dekadickém zápisu jsou pouze cifry 3, 5, 7, 9, každá nejvýše jednou.
- Určete, kolik písmen může popsat Morseova abeceda, která k popsání používá symboly tečka, čárka ve skupinách po jednom, dvou, třech nebo čtyřech symbolech, které se mohou opakovat.

2. Vypočítejte:

- Určete, kolika způsoby se v šestimístné lavici můžeme posadit 6 chlapců, jestliže dva chtějí sedět vedle sebe.
- Určete, kolika způsoby lze „přemístit“ písmena slova *BEROUNKA* tak, aby nějaká skupina po sobě jdoucích písmen utvořila slovo *BERAN*.
- *) Určete počet všech pěticiferných přirozených čísel, jež lze sestavit z cifer 2 a 6, má-li být v každém z nich číslice 2 právě třikrát.

3. Vypočítejte:

- V rovině je dáno 10 bodů, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce. Kolik kružnic lze jimi určit, neleží-li žádné čtyři body na jedné kružnici?
- Hokejové družstvo má 20 hráčů: 13 útočníků, 5 obránců a 2 brankáře. Určete, kolik sestav by mohl trenér vytvořit, jestliže sestava má mít 3 útočníky, 2 obránce a 1 brankáře.
- *) Určete počet všech trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné a jejichž každá strana má velikost vyjádřenou jedním z čísel 4, 5, 6, 7, 8, 9.

4. Určete počet prvků,

- z nichž lze vytvořit 240 dvoučlenných variací bez opakování
- z nichž lze vytvořit dvakrát více 4členných variací bez opakování než 3členných variací bez opakování
- aby při zvětšení jejich počtu o 2 se zvětšil počet permutací 56krát

5. Řešte v \mathbb{N}_0 :

a) $\binom{x-1}{x-3} - 2\binom{x-2}{x-4} = 0$	b) $2\binom{x+6}{x+4} - \binom{x+4}{x+2} = \binom{24}{1} + \binom{5}{2}x$
c) $\binom{x+4}{2} \geq \binom{x-4}{2}$	d) $\binom{x+1}{x-1} - \binom{x}{x} \cdot \binom{8}{5} \leq 44$

6. Vypočítejte: a) $1,01^6$ b) $(1 + \sqrt{3})^5$ c) $0,97^4$ d) $\left(a - \frac{1}{a^2}\right)^7$

7. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu hrací kostkou padne: a) číslo 5 b) liché číslo
c) číslo menší než 6 d) číslo přirozené e) číslo 7.

8. Ze 32 hracích karet náhodně vybereme 5. Jaká je pravděpodobnost, že právě 3 z nich budou zelené?

9. Ve třídě je 25 žáků. Právě 4 z nich nemá domácí úkol. Učitel náhodně zkontroluje 5 žáků. Jaká je pravděpodobnost, že nejvýše dva nemají domácí úkol?

10. Házíme současně modrou a červenou kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že na modré kostce padne sudé číslo a na červené číslo 6?

11. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se 3 dětmi nastane situace:

- všechny 3 děti mají stejné pohlaví nebo nejmladší je dívka
- všechny tři jsou dívky nebo prostřední je chlapec

12*. Házíme 10krát mincí. Jaká je pravděpodobnost, že líc padne nejvýše 8krát?