

**Úlohy za 3 body**

1. Julie hodila pěti standardními šestistěnnými kostkami v součtu 19 ok. Určete největší možný počet šestek při tomto hodu.

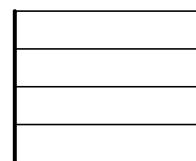
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

2. Kterému z čísel je roven zlomek

$$\frac{7777^2}{5555 \cdot 2222} ?$$

- (A) $\frac{7}{10}$ (B) $\frac{77}{110}$ (C) 1 (D) $\frac{49}{10}$ (E) 49

3. Ema má čtyři pastelky různých barev. Kolika způsoby může vybarvit vlajku se třemi pruhy tak, aby každý pruh byl celý vybarven právě jednou barvou a každé dva sousední pruhy měly různou barvu?

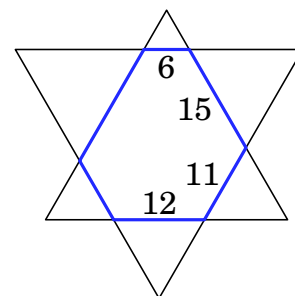


- (A) 24 (B) 27 (C) 32 (D) 36 (E) 64

4. Kolik dvojic x, y kladných celých čísel vyhovuje rovnici $x + 2y = 2^{10}$?

- (A) $2^9 - 1$ (B) 2^9 (C) $2^9 + 1$ (D) $2^9 + 2$ (E) 2^{10}

5. Průnikem dvou rovnostranných trojúhelníků je šestiúhelník s rovnoběžnými protějšími stranami. Délky některých jeho stran jsou vyznačeny na obrázku. Určete obvod tohoto šestiúhelníku.



- (A) 62 (B) 64 (C) 66 (D) 68 (E) 70

6. V ZOO se do řady posadilo 23 vačnatců, každý z nich je klokan nebo vombat. Každý vačnatec usedl vedle aspoň jednoho klokana. Určete největší možný počet vombatů v této řadě.

- (A) 7 (B) 8 (C) 10 (D) 11 (E) 12

7. Která číslice je na pozici jednotek v součinu $(5^5 + 1)(5^{10} + 1)(5^{15} + 1)$?

- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6

8. Číslo 7 a 9 jsou již umístěna ve dvou z devíti polí

	7		9					
--	---	--	---	--	--	--	--	--

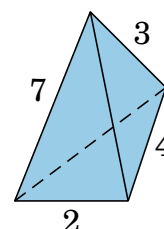
. Kolika způsoby lze do dalších polí umístit všechna zbývající přirozená čísla od 1 do 9 tak, že součet libovolných tří sousedních čísel je dělitelný třemi?

- (A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 18 (E) 24

Úlohy za 4 body

9. Délky hran čtyřstěnu jsou vyjádřeny přirozenými čísly. Čtyři z nich vidíte na obrázku. Určete součet délek zbylých dvou hran.

- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13



10. Pro přirozené číslo n je $n!$ definován jako součin všech přirozených čísel od 1 do n . Například $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Určete ciferný součet přirozeného čísla N , pro které platí $N! = 6! \cdot 7!$.

- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 9

11. Grafy funkcí $y = x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$ procházejí týmž bodem nezávisle na hodnotě parametru a . Jaký je součet obou souřadnic tohoto bodu?

- (A) 2 (B) 4 (C) 7 (D) 8 (E) jiné číslo

12. Je dáno pět čísel a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 se součtem S . Pro každé $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ platí $a_k = k + S$. Najděte S .

- (A) $-\frac{15}{4}$ (B) $\frac{15}{4}$ (C) -15 (D) 15 (E) jiné číslo

13. Kolik dvojic m, n celých čísel vyhovuje nerovnici $|2m + 2023| + |2n + m| \leq 1$?

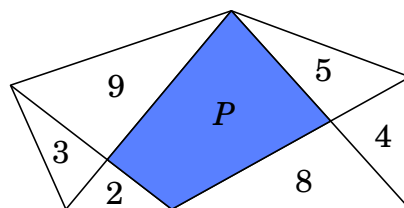
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

14. Pro které n můžeme zapsat číslo 5^{5^6} ve tvaru n^n ?

- (A) 5^5 (B) 5^6 (C) 5^{30} (D) 11 (E) 30

15. Pětúhelník je rozdělen na menší části, jak vidíte na obrázku. Čísla uvnitř trojúhelníků značí jejich obsahy. Vypočtete obsah tmavého čtyřúhelníku.

(A) 15 (B) $\frac{31}{2}$ (C) 16 (D) 17 (E) 18



16. Kolik přirozených dělitelů součinu $2^{20} \cdot 3^{23}$ není děliteli čísla $2^{10} \cdot 3^{20}$?

(A) 13 (B) 30 (C) 273 (D) 460 (E) jiný počet

Úlohy za 5 bodů

17. Trináct účastníků soutěže ve sportovním lezení závodí ve třech kategoriích. Skóre každého účastníka je součinem jejich (neděleného) umístění v těchto kategoriích. Například, pokud soutěžící obsadil v jednotlivých kategoriích 4., 3. a 6. místo, jeho závěrečné skóre je $4 \cdot 3 \cdot 6 = 72$. V závěrečném pořadí soutěže jsou soutěžící seřazeni od nejmenšího skóre. Hana se umístila na prvním místě ve dvou kategoriích. Určete její nejhorší možnou pozici v závěrečném pořadí.

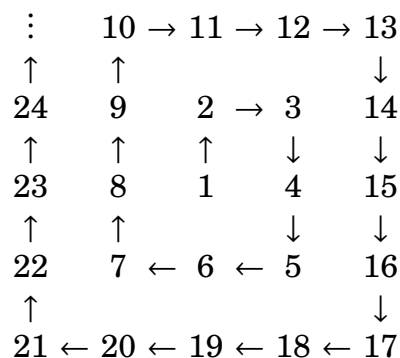
(A) druhá (B) třetí (C) čtvrtá (D) pátá (E) šestá

18. Všechna přirozená čísla jsou ve vzestupném pořadí uspořádána do spirály podle obrázku. Jestliže budeme ve spirále dále pokračovat podle uvedeného vzoru, ve kterých pozicích se objeví čísla 625, 626 a 627?

(A) $\begin{array}{c} 627 \\ \uparrow \\ 626 \\ \uparrow \\ 625 \end{array}$ (B) $\begin{array}{c} 625 \rightarrow 626 \\ \downarrow \\ 627 \end{array}$

(C) $\begin{array}{c} 626 \rightarrow 627 \\ \uparrow \\ 625 \end{array}$ (D) $\begin{array}{c} 625 \\ \downarrow \\ 626 \\ \downarrow \\ 627 \end{array}$

(E) $625 \rightarrow 626 \rightarrow 627$

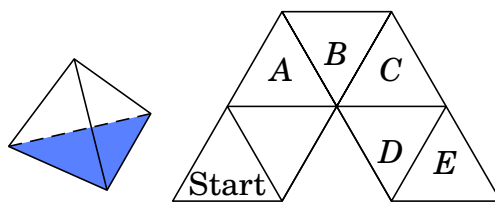


19. Část mnohočlenu 5. stupně je zabarvena. Víme, že všech pět jeho kořenů jsou celá čísla. Určete nejvyšší mocninu dvojčlenu $x - 1$, která může dělit tento mnohočlen.

$$x^5 - 11x^4 + \text{zabarvená část} - 7$$

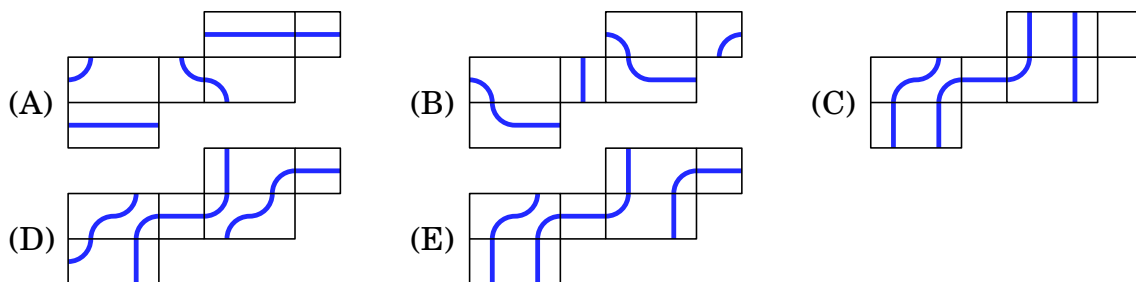
(A) $(x - 1)^1$ (B) $(x - 1)^2$ (C) $(x - 1)^3$ (D) $(x - 1)^4$ (E) $(x - 1)^5$

20. Pravidelný čtyřstěn má jednu stěnu tmavou. Touto tmavou stěnou jej položíme na stůl (viz obrázek) na pole označené Start. Poté čtyřstěn překlápíme přes hrany po vyznačené cestě. Na kterém z polí bude poprvé opět tmavá stěna na stole?



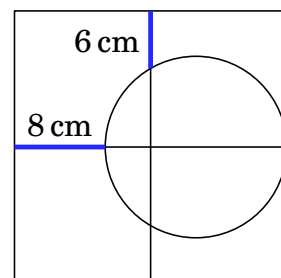
- (A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

21. Leoš nakreslil přes všechny stěny hranolu uzavřenou čáru. Který z následujících obrázků může znázorňovat síť tohoto hranolu.

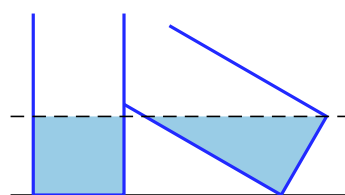


22. Velký čtverec je rozdělen na 4 menší. Kružnice se středem ležícím na vodorovné ose velkého čtverce se dotýká jeho pravé strany. Odtíná ze stran menšího čtverce úseky, délky dvou z nich vidíte na obrázku. Vypočtěte délku strany velkého čtverce.

- (A) 18 cm (B) 20 cm (C) 24 cm (D) 28 cm (E) 30 cm



23. Dva shodné válcové sudy obsahují stejné množství vody. Jeden sud stojí kolmo, druhý je nakloněn tak, že hladina vody se dotýká jeho podstavy a je ve stejné výšce jako v prvním sudu, jak vidíte na obrázku. Obsah podstavy sudů je $3\pi \text{ m}^2$. Kolik vody je v sudech?



- (A) $\frac{3}{4}\pi \text{ m}^3$ (B) $3\sqrt{3}\pi \text{ m}^3$ (C) $6\pi \text{ m}^3$
(D) $9\pi \text{ m}^3$ (E) nelze jednoznačně určit

24. Součin šesti po sobě jdoucích přirozených čísel je 12místné číslo tvaru

$$\overline{abb\ cdd\ cdd\ abb},$$

kde číslice a , b , c a d jsou v nějakém pořadí čtyři po sobě jdoucí čísla. Určete d .

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Správná řešení soutěžních úloh

STUDENT 2023

Úlohy za 3 body

1 C, 2 D, 3 D, 4 A, 5 E, 6 D, 7 E, 8 E,

Úlohy za 4 body

9 C, 10 A, 11 E, 12 A, 13 B, 14 A, 15 C, 16 C,

Úlohy za 5 bodů

17 B, 18 C, 19 D, 20 E, 21 D, 22 A, 23 D, 24 C.